Классификация случайных процессов на основе многомерных марковских моделей

Пантенков Д.Г.
ОАО «РКК Энергия им. С.П. Королева», г. Королёв, Московской обл.

Аннотация

В данной статье предлагается научно-методический аппарат классификации случайных процессов на основе многомерных марковских моделей, приводятся результаты имитационного моделирования для одномерных и двумерных марковских моделей.

Ключевые слова: случайный процесс; марковская модель; имитационное моделирование; переходные вероятности; распределение вероятностей.

Введение

В различных задачах обработки сигналов возникает необходимость определения принадлежности наблюдаемой реализации случайного процесса определенному классу (типу, виду) [1,2]. Для этого необходимо, прежде всего, выбрать базовую модель классифицируемых процессов.

Математический аппарат для классификации случайных процессов

Удобным и универсальным описанием дискретного случайного процесса x_i ($i=\overline{1,N}$ - номер отсчета, N - объем выборки) является сложная (многомерная) Марковская модель (цепь Маркова n-го порядка) [3,4]. В реализации $x_1, x_2, ..., x_N$ значения условных вероятностей $P(x_k / x_1, x_2, ..., x_N)$ отсчетов x_k зависят только от n предшествующих значений отсчетов x_{k-1}, $x_{k-2}, \dots,$ x_{k-n} $(k > n)$, то есть

$$P(x_k / x_1, x_2, ..., x_N) = P(x_k / x_{k-1}, x_{k-2}, ..., x_{k-n}). \tag{1}$$

Для простой цепи Маркова [4] очередной отсчет зависит только от предшествующего отсчета (n = 1) и в этом случае

$$P(x_k / x_1, x_2, ..., x_N) = P(x_k / x_{k-1}). \tag{2}$$

Вероятности (1) называют переходными и совместно с распределением вероятностей начальных значений

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{3}$$

они полностью описывают Марковский процесс.

Для Марковского процесса второго порядка (n = 2) аналогично получим

$$P(x_k = k / x_{k-1} = i, x_{k-2} = j) = P_{ijk}, \tag{4}$$

то есть трехмерную матрицу переходных вероятностей и так далее.

Начальные значения x_1 для простой цепи Маркова являются случайными величинами, вероятности $Q_i^{(1)}$ которых описываются матрицей-столбцом вида

$$Q_i = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_M \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Для процесса второго порядка начальными являются пары значений x_1, x_2, вероятности которых представляются матрицей вида

$$\left[Q_{i,j}\right]=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1M} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{M1} & Q_{M2} & \dots & Q_{MM} \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Как видно, описание процесса второго порядка существенно сложнее, чем для простой цепи Маркова, поэтому применение моделей более высоких порядков становится нецелесообразным. Допустим, что имеется R различных классов V_r, $r=\overline{1,R}$, случайных процессов, каждый из которых описывается своей марковской моделью в виде матриц вероятностей $[Q^{(r)}]$ начальных значений $(n-1)$-го порядка и переходных вероятностей $[P^{(r)}]$ n-го порядка (n - порядок модели, а r - номер класса). Если принята реализация из N отсчетов случайного процесса $x_1, x_2, ..., x_N$ с номерами уровней квантования $i_1, i_2, ..., i_N$, то апостериорная вероятность ее принадлежности к классу V_r определяется формулой Байеса [3] вида

$$P(V_r / x_1, x_2, ..., x_N) = \frac{P(V_r)P(x_1, x_2, ..., x_N / V_r)}{\sum_{r=1}^{R} P(V_r)P(x_1, x_2, ..., x_N / V_r)}, \qquad (7)$$

где $P(V_r)$ - априорная вероятность класса V_r,

$P(x_1, x_2, ..., x_N / V_r)$ - условная вероятность реализации в классе V_r.

Вероятность $P(x_1, x_2, ..., x_N / V_r)$ можно записать в виде

$$P(x_1, x_2, ..., x_N / V_r) = P(x_1, x_2, ..., x_n / V_r) \times \prod_{i=n+1}^{N} P(x_i / x_{i-1}, x_{i-2}, ..., x_{i-n}, V_r). \qquad (8)$$

Для модели первого порядка получим

$$P(x_1, x_2, ..., x_N / V_r) = P(x_1 / V_r) \times \prod_{k=2}^{N} P(x_k / x_{k-1}, V_r) = P(k_1 / V_r) \times \prod_{i=2}^{N} P_{k_{i-1} k_i}^{(V_r)}, \qquad (9)$$

а для модели второго порядка соответственно

$$P(x_1, x_2, ..., x_N / V_r) = P(x_1, x_2 / V_r) \times \prod_{i=3}^{N} P(x_i / x_{i-1}, x_{i-2}, V_r) = P(k_1 k_2 / V_r) \times \prod_{i=3}^{N} P_{k_{i-2} k_{i-1} k_i}^{(V_r)}. \qquad (10)$$

Рассматриваемые вероятности представим в виде

$$P(x_1, x_2, ..., x_N / V_r) = P(k_1 / V_r) \prod_{i=1}^{M} \prod_{j=1}^{M} \left(P_{ij}^{(V_r)}\right)^{l_{ij}} = P(k_1 / V_r) \times 2^{\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} l_{ij} \log_2 P_{ij}^{(V_r)}}, \qquad (11)$$

$$P(x_1, x_2, ..., x_N / V_r) = P(k_1 k_2 / V_r) \prod_{i=1}^{M} \prod_{j=1}^{M} \prod_{k=1}^{M} \left(P_{ijk}^{(V_r)}\right)^{l_{ijk}} = P(k_1 k_2 / V_r) \times 2^{\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{M} l_{ijk} \log_2 P_{ijk}^{(V_r)}}, \qquad (12)$$

где l_{ij} - число переходов в наблюдаемой реализации соседних пар отсчетов от значения i к j для простой цепи Маркова, а l_{ijk} - аналогичное число переходов в соседних тройках отсчетов от значения i через j к значению k для модели второго порядка. Эти числа удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} l_{ij} = N - 1, \qquad (13)$$

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} l_{ijk} = N - 2. \qquad (14)$$

Аналогично можно записать выражения для вероятностей реализаций случайных процессов более высокого порядка.

Обозначим для простой цепи Маркова

$$L_r = -\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} l_{ij} \log_2 P_{ij}^{(V_r)}, \qquad (15)$$

а для модели второго порядка

$$L_r = -\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{M} l_{ijk} \log_2 P_{ijk}^{(V_r)} \qquad (16)$$

и в общем случае для модели n-го порядка

$$L_r = -\sum_{i_1=1}^{M}\sum_{i_2=1}^{M}\ldots\sum_{i_n=1}^{M} l_{i_1 i_2 \ldots i_n} \log_2 P_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{(V_r)}, \qquad (17)$$

где $l_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ - числа переходов значений отсчетов случайного процесса от уровня с номером i_1 через i_2 и так далее до i_n, а $P_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{(V_r)}$ - вероятности соответствующих переходов в классе V_r.

Тогда для условных вероятностей реализаций с учетом (17) получим

$$P(x_1, x_2, ..., x_N / V_r) = P(k_1 k_2 ... k_n / V_r) \times 2^{-L_r}. \qquad (18)$$

Подставляя (18) в (7), определим апостериорные вероятности классов

$$P(V_r / x_1, x_2, ..., x_N) = \frac{P(V_r) P(k_1 k_2 ... k_n / V_r) 2^{-L_r}}{\sum_{r=1}^{R} P(V_r) P(k_1 k_2 ... k_n / V_r) 2^{-L_r}}. \qquad (19)$$

Решение о принадлежности наблюдаемой реализации $x_1, x_2, ..., x_N$ соответствующему классу r_0 принимается по максимуму апостериорной вероятности

$$r_0 \Rightarrow \max_r P(V_r / x_1, x_2, ..., x_N), \qquad (20)$$

то есть принятая реализация соответствует классу V_r с номером $r = r_0$, для которого обеспечивается максимум апостериорной вероятности (20).

Как видно из соотношения (19), величины L_r полностью определяют вероятности классов и выступают в качестве решающих статистик в задаче классификации и с уменьшением решающих статистик вероятности увеличиваются, тогда

$$L_{r_0} = \min_r (L_r). \qquad (21)$$

Из выражения (19) следует неравенство

$$P(V_{r0} / x_1, x_2, ..., x_N) \geq \frac{P(V_{r0}) P(k_1 k_2 ... k_n / V_{r0}) 2^{-L_{r0}}}{P(V_{r0}) P(k_1 k_2 ... k_n / V_{r0}) 2^{-L_{r0}} + 2^{-L_{k1}} A}, \qquad (22)$$

где

$$A = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq r_0}}^{R} P(V_r) P(k_1 k_2 ... k_n / V_r), \qquad (23)$$

$L_{r_1} > L_{r_0}$ - ближайшее к минимальному значение решающей статистики,

$$L_{r_1} = \min_{r \neq r_0} (L_r). \qquad (24)$$

Вероятность решения о принадлежности наблюдаемой реализации выбранному классу r_0 должна быть не менее заданной доверительной вероятности $P_{ДОВ}$

$$P(V_{r0} / x_1, x_2, ..., x_N) \geq P_{ДОВ}, \qquad (25)$$

тогда из (22) можно записать неравенство

$$\frac{P(V_{r0})P(k_1k_2...k_n/V_{r0})2^{-L_{r0}}}{P(V_{r0})P(k_1k_2...k_n/V_{r0})2^{-L_{r0}}+2^{-L_{k1}}A} \geq P_{ДОВ}\,, \tag{26}$$

из которого вытекает решающее правило

$$L_{r_1}-L_{r_0} \geq \log_2\left[\frac{B}{1-P_{ДОВ}}\right], \tag{27}$$

где B – база сигнала и с учетом выражения (23)

$$C=\frac{\sum\limits_{\substack{r=1\\ r\neq r_0}}^{R} P(V_r)P(k_1k_2...k_n/V_r)}{P(V_{r_0})P(k_1k_2...k_n/V_{r_0})}. \tag{28}$$

Процедура классификации заключается в следующем. Для принятой реализации случайного процесса из N отсчетов $x_1, x_2, ..., x_N$ согласно (15) - (17) вычисляются решающие статистики L_r для каждого класса, $r=\overline{1,R}$, из них выбираются минимальная величина L_{r_0}, соответствующая классу с номером r_0, и следующая за ней величина L_{r_1} и, если выполняется условие (23), принимается решение о принадлежности реализации классу с номером r_0. Если неравенство (23) не выполняется, то решение не принимается, реализация дополняется новыми отсчетами (увеличивается N) и вновь проводится классификация.

На рис. 1а представлена графически полученная в результате статистического имитационного моделирования матрица чисел l_{ij} перехода от i-го уровня квантования к j-му для модели первого порядка (простой цепи Маркова) нормального случайного процесса с независимыми отсчетами при M = 64. На рис. 1б показана область ненулевых значений чисел перехода (имеет вид окружности).

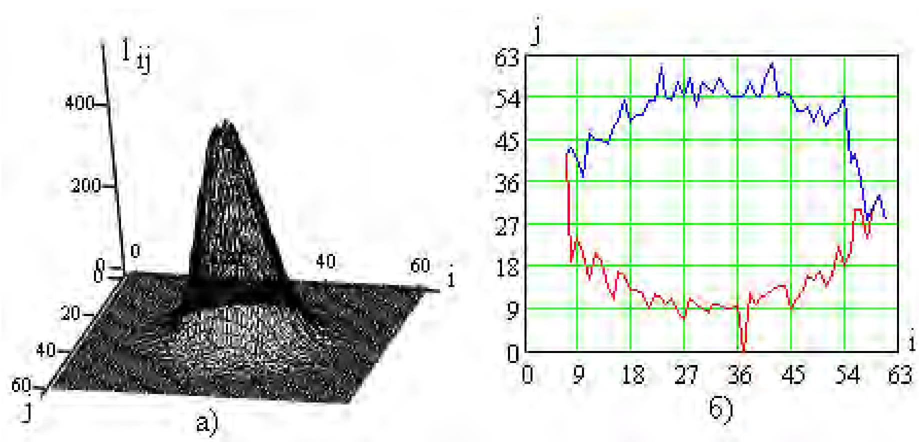

Рис. 1. Матрица перехода и область ненулевых значений чисел перехода при M=64 для марковской модели первого порядка

При наличии корреляции значений случайного процесса (для случайного процесса на выходе низкочастотного фильтра) вид матрицы чисел перехода l_{ij} показан на рис. 2.а, а область ненулевых значений этих чисел показана на рис. 2.б. Как видно, взаимосвязь отсчетов существенно изменяет вид матрицы чисел перехода и, следовательно, матрицы переходных вероятностей. Для двумерной Марковской модели (n = 2) матрицу чисел перехода l_{ijk} нельзя отобразить графически (для этого требуется четырехмерное пространство). На рис. 3а показаны полученные методами статистического имитационного моделирования границы области ненулевых значений чисел перехода нормального случайного процесса с независимыми отсчетами при M = 64, (она имеет шарообразный вид).

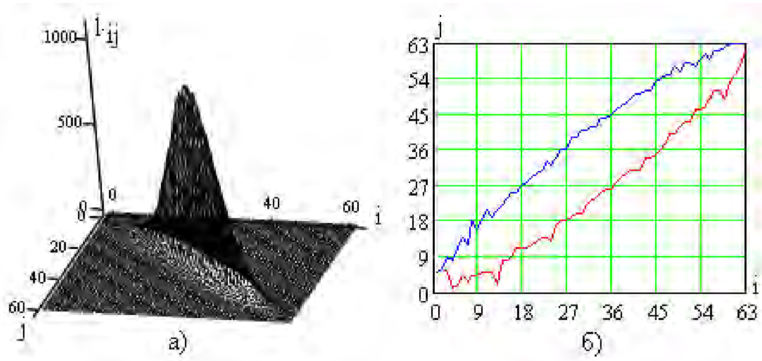

Рис. 2. Матрица перехода и область ненулевых значений чисел перехода при $M = 64$ для марковской модели второго порядка.

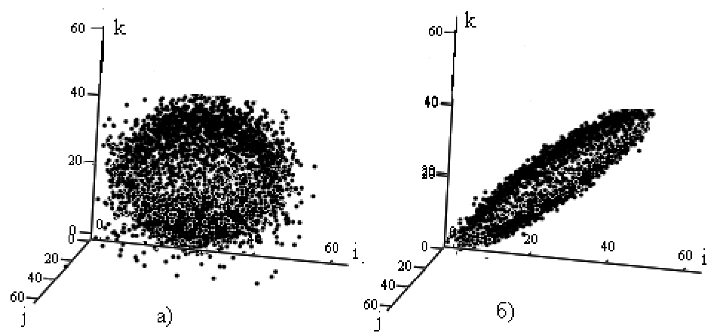

Рис. 3. Границы области ненулевых значений чисел перехода нормального случайного процесс с независимыми отсчетами при $M = 64$

На рисунке 3б показана аналогичная область для коррелированных отсчетов (вида эллипсоида вращения с главной осью, равноудаленной от координатных осей). При повышении коэффициента корреляции эта область сужается. Максимум чисел переходов наблюдается в центре областей ($i = j = k = M/2$). При $n \geq 3$ свойства матриц переходных вероятностей не удается отобразить графически.

Заключение

Приведенный научно-методический аппарат позволяет классифицировать случайный процесс для его последующей обработки. Повышение порядка марковской модели усиливает контрастность сравниваемых классов (чувствительность процедуры классификации) ценой значительного усложнения описания и увеличения требуемых объемов выборки отсчетов случайных процессов на этапах обучения и классификации.

Литература

1. Каневский З.М., Литвиненко В.П. Классификационная скрытность случайных процессов. // «Синтез, передача и прием сигналов управления и связи»: Межвуз. сб. науч. тр. Воронеж: Изд-во ВГТУ. 1994.
2. Литвиненко Ю.В. Информационные характеристики процедуры классификации марковских процессов // Синтез, передача и прием сигналов управления и связи: Межвуз. сб. науч. тр. Воронеж: Изд-во ВГТУ. 1999.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984.
5. Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. М.: Мир, 1989.

Для цитирования:
Пантенков Д.Г. Классификация случайных процессов на основе многомерных марковских моделей // i-methods. 2009. Т. 1. № 1. С. 22–27.

Classification of random processes on the basis of the multidimensional Markov models

Panchenkov D.G.
JSC "rocket and space Corporation Energia. S. P. Korolev RSC Energia", Korolev, Moscow region.

Abstract
In this paper we present a methodological apparatus for the classification of random processes based on multidimensional Markov models, the results of simulation for one-dimensional and two-dimensional Markov models.

Keywords: random process; Markov model; simulation; transition probabilities; probability distribution.

References

1. Kanevsky M.Z. and Litvinenko V.P. Secrecy classification of random processes. // "The synthesis, transmission and reception of control signals and communications": Intercollege. SB. nauch. Tr. Voronezh: Publishing house of Vilnius Gediminas technical University. 1994.
2. Litvinenko Y.V. data characteristics of the procedure for the classification of Markov processes // the Synthesis, transmission and reception of control signals and communications: Interuniversity. SB. nauch. Tr. Voronezh: Publishing house of Vilnius Gediminas technical University. 1999.
3. Korn G., Korn T. Handbook on mathematics for scientists and engineers. M.: Nauka. 1970.
4. Feller V. Introduction to probability theory and its applications. M.: Mir. 1984.
5. Nummelin E. General irreducible Markov chains and nonnegative operators. M.: Mir. 1989.

For citation:
Panchenkov D.G. Classification of random processes on the basis of the multidimensional Markov models // i-methods. 2009. T. 1. No. 1. Pp. 22–27.