Оптимальное автоматизированное управление взаимным маневром космических аппаратов

Гончаревский В.С.
Заслуженный деятель науки и техники РФ, доктор технических наук профессор, Военно–космическая академия имени А.Ф.Можайского, г. Санкт–Петербург

Аннотация

В статье рассматриваются вопросы отыскания энергетически оптимального автоматизированного управления взаимным маневром космических аппаратов при наличии ограничений на вид программной траектории.

Ключевые слова: взаимный манёвр; автоматизированное управление; программная траектория; линия визирования; космический аппарат.

Введение

Повышение эффективности управления взаимным маневром (ВМ) двух или более космических аппаратов (КА) связано с отысканием энергетически оптимальных программ этого управления.

Предположим, что допустимые управляющие воздействия принадлежат к классу непрерывных функций времени. С учетом этого ограничения поставим задачу отыскания программного управления u, обеспечивающего перевод с минимальными энергозатратами (ЭЗ) активного (маневрирующего) КА из некоторой начальной точки фазового пространства состояний $\vec{q}_0=\vec{q}(\tau_0)$ в некоторую конечную точку этого же пространства $\vec{q}_k=\vec{q}(\tau_k)$ за фиксированное время $T=\tau_k-\tau_0$, где $\vec{q}(\tau)=[\vec{R}(\tau),\vec{V}(\tau)]$ – вектор относительного состояния центров масс космических аппаратов, $\vec{R}(\tau)$ – вектор относительного положения, $\vec{V}(\tau)$ – вектор относительной скорости, τ – текущее безразмерное время управления, а τ_0, τ_k– соответственно моменты начала и конца взаимного маневра. Предположим, что на величину составляющих вектор-функции управления $\vec{u}$ никаких ограничений не накладывается. Тогда для решения поставленной задачи можно использовать методы классического вариационного исчисления [1].

Если ограничения на вид программной траектории относительного движения (ОД) при взаимном маневре, а, следовательно, и кинематические связи между компонентами r_1 вектора $\vec{R}=[r_i]^{1\times3}$ отсутствуют, то задача отыскания энергетически оптимального управления $\vec{u}$ состоит в том, чтобы найти экстремали, доставляющие минимум функционалу

$$J=\int_{\tau_0}^{\tau_k} F d\tau, \tag{1}$$

где $F=\vec{u}^2$.

При этом допустимые функции, принадлежащие к классу непрерывных функций, должны удовлетворять краевым условиям

$$\vec{q}(\tau_0)=\vec{q}_0, \vec{q}(\tau_k)=\vec{q}_k \tag{2}$$

и ограничивающим условиям, накладываемым дифференциальными связями

$$\vec{u}=\vec{Q}-A\vec{R}-B\vec{V}, \tag{3}$$

описывающими ОД. В соотношении (3) $\vec{Q}=d\vec{V}/d\tau$, A и B – квадратные матрицы коэффициентов, вид которых определяется типом относительной системы координат (ОСК), в которой рассматривается движение [2].

Поставленная задача является общей вариационной задачей Лагранжа, т.е. задачей на условный экстремум функционала (1), когда на векторную функцию $\vec{R}$ наложены дифференциальные связи, задаваемые динамической моделью (3).

Подставив в соотношение (1) уравнение (3), можно свести эту задачу к задаче на безусловный экстремум функционала

$$J = \int_{\tau_0}^{\tau_k} F(\tau, \vec{R}, \vec{V}, \vec{Q}) d\tau \cdot \tag{4}$$

Для того, чтобы функционал (4), определенный на множестве функций $\vec{R} = \vec{R}(\tau)$, имеющих четыре непрерывные производные и удовлетворяющих краевым условиям (2), достигал на данной функции экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла векторному уравнению Эйлера-Пуассона

$$\vec{F}_{\vec{R}} - d\vec{F}_{\vec{V}} / d\tau + d^2 \vec{F}_{\vec{Q}} / d\tau^2 = 0, \tag{5}$$

где $\vec{F}_{\vec{R}}$, $\vec{F}_{\vec{V}}$, $\vec{F}_{\vec{Q}}$ – трехмерные векторы-столбцы частных производных функций $\vec{F}$ по составляющим векторов $\vec{R}$, $\vec{V}$, $\vec{Q}$.

Найдя общее решение уравнения (5) и определив значения его произвольных постоянных из краевых условий (2), получим искомую экстремаль $\vec{R}_э(\tau)$. Подставив затем выражения для экстремали и ее производных в правую часть уравнения (3), получим искомое управление в аналитической форме

$$\vec{u}_э = \vec{Q}_э - A\vec{R}_э - B\vec{V}_э, \tag{6}$$

имеющее оптимальную структуру. Оно обеспечивает решение поставленной перед взаимным маневром задачи и зависит от его краевых условий и заданного времени выполнения, которые являются параметрами структуры управления $\vec{u}_э$. Затем можно оценить значение ЭЗ, необходимых для реализации управления $\vec{u}_э$. Для этого нужно рассчитать экстремальное значение показателя энергозатрат $J_Э$, которое определяется значением функционала (1) при $\vec{u} = \vec{u}_э$.

Помимо отыскания оптимальных структур управления различными разновидностями ОД при взаимном маневре КА, большой практический интерес представляет также определение энергетически оптимальных значений краевых условий и времени выполнения маневра, являющихся параметрами этих структур. Найти данные значения можно в результате постановки и решения вариационных задач с подвижными концами, в которых граничные точки должны быть выбраны таким образом, чтобы функционал (1) достигал экстремума. Для этого следует использовать соответствующие условия трансверсальности функционала (1), которые позволяют задать недостающие уравнения для определения произвольных постоянных в общем решении уравнения Эйлера-Пуассона.

Одними из основных разработанных и используемых на практике методов осуществления ВМ являются методы управления относительно линии визирования (ЛВ) [3]. В этих методах на вид программной траектории ОД активного КА, а, следовательно, и на компоненты вектора $\vec{R}$ накладываются условия определенных кинематических связей. Такие связи могут быть двух основных типов: линейные и нелинейные. В первом случае траектория ОД при ВМ должна представлять собой при любых значениях начальных условий и времени выполнения маневра отрезок неподвижной прямой, проходящей через заданные точки фазового пространства координат. Кинематические связи такого типа обычно имеют место при использовании методов сближения или удаления по ЛВ. Во втором случае программная траектория ОД должна представлять собой при тех же условиях пространственную или плоскую кривую второго порядка. Наиболее характерным примером таких кинематических связей являются маневры облета или барражирования на постоянной дальности, когда траектория ОД должна быть круговой с центром в точке расположения пассивного КА-цели.

Рассмотрим некоторые особенности постановки и решения вариационных задач по отысканию оптимальных программ и экстремальных краевых условий при использовании методов управления с указанными ограничениями. Так как здесь на компоненты вектора $\vec{R}$ накладываются условия кинематических связей, то для отыскания оптимальной программы управления необходимо решить вариацион-

ную задачу на условный экстремум функционала (1). Однако известно, что задачу нахождения условного экстремума функции нескольких переменных можно свести к задаче на безусловный экстремум, выразив переменные, на которые наложены связи, через соответствующее число независимых переменных. Это положение справедливо и для вариационных задач. Поэтому, подставив заданные условия кинематических связей в выражение для динамической модели ОД (3), можно свести поставленную задачу к отысканию безусловного экстремума функционала.

В ряде случаев (маневры сближения или удаления по ЛВ, компланарный облет и барражирование на квазипостоянной дальности, плоское барражирование на квазипостоянной дальности) число независимых переменных может быть сведено к единице. Тогда функционал (1) становится зависимым от одной скалярной функции r_i, роль которой играет одна из компонент вектора $\vec{R}$, и ее первой и второй производных, а векторно-матричное уравнение (5) трансформируется в одно скалярное уравнение Эйлера-Пуассона

$$\vec{F}_{r_i} - d\vec{F}_{\dot{r}_i} / d\tau + d^2\vec{F}_{\ddot{r}_i} / d\tau^2 = 0, \tag{7}$$

где $\vec{F}_{r_i}$, $\vec{F}_{\dot{r}_i}$, $\vec{F}_{\ddot{r}_i}$ – частные производные подынтегрального выражения функционала по r_i, $\dot{r}_i$, $\ddot{r}_i$.

При линейных кинематических связях уравнение (7) представляет собой линейное дифференциальное уравнение (ЛДУ) четвертого порядка и поэтому задача отыскания оптимальной в смысле минимума функционала (1) программы управления может быть решена в ряде случаев в замкнутой форме.

Так, например, если ВМ выполняется вдоль стабилизированной ЛВ, то уравнение (7) с учетом присущих этому методу управления кинематических связей принимает следующий вид:

$$r_1^{IV} + l_{11}\ddot{r}_1 + m_{11}\dot{r}_1 + n_{11}r_1 = 0, \tag{8}$$

где $l_{11} = -2a_{11} - b_{12}^2 - b_{13}^2$, $m_{11} = -2(\dot{a}_{11} + b_{12}\dot{b}_{12} + b_{13}\dot{b}_{13})$,

$n_{11} = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 - d(a_{21}b_{12} + a_{31}b_{13}) / d\tau$, a_{ij}, b_{ij} – элементы матриц A и B динамической модели ОД КА.

При осуществлении компланарного ВМ вдоль ЛВ, стабилизированной в наклонной орбитальной ОСК, связанной с пассивным КА, находящимся на близкой к круговой орбите, элементы матриц A и B

$$a_{11} = 3\sin^2\beta,\ a_{21} = 3\sin\beta\cos\beta,\ b_{12} = 2,\ a_{31} = b_{13} = 0,$$

где β – угол, характеризующий направление стабилизированной ЛВ относительно местной вертикали, являются постоянными величинами [2]. Следовательно, уравнение (8) будет представлять собой в этом случае ЛДУ четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение можно записать в виде

$$r_1 = \sum_{n=1}^{4} C_n \exp\mu_i\tau, \tag{9}$$

где C_n – произвольные постоянные,

μ_I – корни характеристического уравнения

$$\mu^4 + l_{11}\mu^2 + n_{11} = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) является биквадратным и имеет сопряженные корни

$$\mu_1 = \left|\sqrt{q_1}\right|,\ \mu_2 = \left|\sqrt{q_2}\right|,\ \mu_3 = -\mu_1,\ \mu_4 = -\mu_2,$$

$$q_1 = -0,5l_{11} + \sqrt{0,25l_{11}^2 - n_{11}},\ q_2 = -0,5l_{11} - \sqrt{0,25l_{11}^2 - n_{11}}, \tag{11}$$

$$l_{11} = -2a_{11}b_{12}^2 = -2(3\sin^2\beta + 2),\ n_{11} = a_{11}^2 + a_{21}^2 = 9\sin^2\beta.$$

Произвольные постоянные C_n определяются из краевых условий маневра

$$r_1(0) = r_{10},\ r_1(T) = r_{1k},\ \dot{r}_1(0) = \dot{r}_{10},\ \dot{r}_1(T) = \dot{r}_{1k}.$$

Решение (9) является экстремалью $r_1 = r_{1э}(\tau)$, доставляющей минимум функционалу (1). Она представляет собой оптимальный закон перемещения активного КА вдоль стабилизированной ЛВ. Подста-

вив этот закон в правые части уравнений динамической модели ОД, получим искомое оптимальное управление $\vec{u}_э = [u_{r1э}, u_{r2э}]$, обеспечивающее решение поставленной задачи. Его составляющие

$$u_{r1э} = \ddot{r}_{1э} - a_{11}\dot{r}_{1э},\ u_{r2э} = -a_{21}\dot{r}_{1э} + b_{12}\dot{r}_{1э}. \tag{12}$$

Управление $u_{r1э}$ обеспечивает перемещение активного вдоль заданного направления ЛВ, определяемом значением угла β, а управление $u_{r2э}$ удерживает его на этом направлении. Подстановка соотношений (12) в формулу (1) дает соответствующий оптимальному управлению экстремальный показатель энергозатрат $J_э$.

Следует отметить, что в случае нелинейных кинематических связей уравнение (7) становится нелинейным, что затрудняет возможность аналитического конструирования оптимальной программы и обуславливает необходимость применении численных методов ее расчета.

Условия трансверсальности для функционала (1), необходимые для отыскания оптимальных краевых условий при фиксированном времени выполнения взаимного маневра КА, с учетом кинематических связей могут быть записаны в виде

$$\left[(F\dot{r}_i - dF\ddot{r}_i / d\tau)\delta r_i + F\ddot{r}_i\delta\dot{r}_i\right]_{\tau_0}^{\tau_k} = 0. \tag{13}$$

Условия трансверсальности, необходимые для расчета оптимального времени маневра $T_э = \tau_{kэ} - \tau_0$ при фиксированных концах траектории с учетом этих же связей, имеют вид

$$(F - \dot{r}_i F\dot{r}_i - \ddot{r}_i F\ddot{r}_i)\delta\tau\Big|_{\tau_0}^{\tau_{kэ}} = 0. \tag{14}$$

Заключение

Использование условий (13-14) позволяет найти оптимальные параметры управления, определяемого в общем случае соотношением (6) и, как частный случай, эти же параметры, определяемые соотношениями (12).

Литература

1. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз. 1961. 227 с.

2. Гончаревский В.С. Методы и алгоритмы управления относительным движением космических аппаратов. МО РФ. 1998. 87 с.

3. Гончаревский В.С. Автоматизированное управление взаимным маневром космических аппаратов вдоль линии визирования. СПб.: ВКА имени А.Ф.Можайского. 2009. 91 с.

Для цитирования:

Гончаревский В.С. Оптимальное автоматизированное управление взаимным маневром космических аппаратов // i–methods. 2015. Т. 7. № 3. С. 5–9.

Optimal automated control of the mutual maneuver spacecraft

Goncharevsky V.S.
Honored worker of science of RF, doctor of technical Sciences, Professor, Military space Academy named after A. F. Mozhaisky, Saint-Petersburg

Abstract
The article deals with the issues of finding energy-optimal automatic control of mutual maneuver of spacecraft in presence of limitations on the type a program trajectory.

Keywords: mutual maneuver; automated control; program path; line of sight; spacecraft.

References
1. Gelfand I. M., Fomin S. V. calculus of variations. M.: Fizmatgiz. 1961. 227 C.
2. Goncharevsky V. S. Methods and algorithms of control relative motion of spacecraft. THE MINISTRY OF DEFENSE. 1998. 87 C.
3. Goncharevsky V. S. Automated control of mutual manoeuvre of the spacecraft along the line of sight. SPb.: Military space Academy of A. F. Mozhaysky. 2009. 91 p.

For citation:
Goncharevsky V.S. Optimal automated control of the mutual maneuver spacecraft // i-methods. 2015. T. 7. No 31. Pp. 5-9.