ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА КЕЙПОНА В ЗАДАЧАХ ОБНАРУЖЕНИЯ АКТИВНЫХ ПОМЕХ

Егоров Владимир Алексеевич,
г. Санкт-Петербург, Россия, 44eva@rambler.ru

Кондыбаев Нурлан Сакенович,
г. Санкт-Петербург, Россия, nurkon@yandex.ru

Сапрыкин Александр Александрович,
г. Санкт-Петербург, Россия, saprykin.spb@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена задача пеленгации активных помех с помощью простейшей антенной решетки (АР). Для решения этой задачи применяются как обычные амплитудные методы, так и методы высокого разрешения, основанные на анализе ковариационной матрицы данных, снимаемых с АР. Одним из таких методов является метод Кейпона, имеющий ряд преимуществ перед амплитудными методами. В результате исследований работы алгоритма Кейпона с реальными данными и данными, полученными с помощью компьютерного моделирования, выяснилось, что при одних сочетаниях координат помех алгоритм работает превосходно, а при других пропускает помехи большой мощности. В работе приведены математические разработки, помогающие отделить «хорошие» конфигурации координат от «плохих». Эти математические разработки широко используют аппарат линейной алгебры.

Ключевые слова: пеленгация; антенная решетка; ковариационная матрица; алгоритм Кейпона; активные помехи; вектор поиска; сигнальное пространство; шумовое пространство; локальный максимум; линейно независимые векторы; независимые шумы.

Сведения об авторе: Егоров В.А., д.ф.-м.н., профессор, Государственный Электротехнический Университет (СПбГЭТУ); Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, точной механики и оптики (ИТМО); ОАО «Радиотехнический институт имени академика А.Л. Минца»;
Кондыбаев Н.С., начальник отдела, ОАО «Радиотехнический институт имени академика А.Л. Минца»;
Сапрыкин А.А., аспирант, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, точной механики и оптики (ИТМО).

Введение

К активным помехам относится всякое излучение электромагнитной энергии, которое делается с целью подавления или затруднения работы радиолокационных станций. Методы создания активных помех могут быть различными, но все они основаны на том, что мешающее излучение создается на частотах, совпадающих с частотами на которой работает радиолокационная станция. Для уменьшения эффективности противодействия помехам используются модулированные помехи, помехи с импульсной модуляцией, имитационные ответные, шумовые, мерцающие помехи и др. Целью этой статьи является строгий математический анализ возможностей пеленгации методом Кейпона одновременно нескольких помех. Трудно начинать проводить строгое математическое исследование со сложных типов помех и сложных типов антенных решеток (АР), поэтому в статье выбран простейший тип активных помех, работающих на фиксированной частоте и простейший тип АР. В последующих исследованиях авторы намерены продолжить изучение возможностей метода Кейпона для других типов активных помех и АР.

Постановка задачи

В статье продолжены исследования авторов, начатые в [3]. Исследуются возможности метода Кейпона (см. [1], [2]) при пеленгации нескольких стационарных активных помех, генерирующих сигналы на фиксированной частоте. Принята следующая простейшая модель пеленгации помех (см.[2],[3]).

В качестве приемника используется АР, состоящая из *P* рядов по *Q* элементарных антенн в каждом ряду. Расстояния по вертикали и по горизонтали между соседними элементарными антеннами одинаково. На каждую элементарную антенну поступает сумма электромагнитных сигналов от *I* помех, расположенных в пространстве. Векторы токов $\mathbf{s}_i, i=1,2,...,I,$, возбуждаемых этими сигналами в элементарных антеннах − статистически независимые центрированные гауссовские случайные векторы размерности $N = P \times Q$ с ковариационными матрицами

$$\mathbf{R}_i = \sigma_i{}^2 \mathbf{S}_i \mathbf{S}_i{}^H, i=1,2,...,I, \quad (1)$$

где σ_i^2 − мощность *i*-ой помехи. Здесь векторы $\mathbf{S}_i$ являются векторами направлений на соответствующие помехи. Они зависят от обобщенных координат и мощностей помех $\sigma_i{}^2$. Точное определение векторов $\mathbf{S}_i$ приведено ниже (см. (2), (3)). Случайные векторы $\mathbf{s}_i$ с ковариационными матрицами (1) удобно представлять в виде $\mathbf{s}_i = \sigma_i \mathbf{S}_i \varepsilon_i$, где ε_i − независимые гауссовские случайные величины с единичными дисперсиями. В каждой элементарной антенне возникают независимые собственные гауссовские шумы $e_k, k \le N,$ с одинаковыми мощностями μ^2. Эти шумы образуют вектор белого шума e. Наличие других шумов не предполагается. Таким образом, с учетом (1) вектор токов в элементарных антеннах имеет вид

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{I} \mathbf{s}_i + \mathbf{e} = \sum_{i=1}^{I} \sigma_i \mathbf{S}_i \varepsilon_i + \mathbf{e},$$

так что ковариационная матрица вектора $\mathbf{s}$ равна

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{I} \mathbf{R}_i + \mu^2 \mathbf{E},$$

где $\mathbf{E}$ - единичная матрица.

В алгоритме Кейпона (см. [1], [2]) используемом в статье, считается, что отношение сигнал/шум $\rho = \min_{i \le I} \sigma_i^2 / \mu^2$ принимает достаточно большие значения, а матрица $\mathbf{R}$ известна (или предварительно оценена с удовлетворительной точностью), так что оценки угловых координат помех строятся на основе ее анализа.

Вернемся к описанию векторов $\mathbf{S}_i$ из (1). Они определяются с помощью обобщенных координат соответствующих помех (ψ_i, θ_i) (см. [2]). Эти координаты зависят от ориентации элементарных антенн, которая для всех них предполагается одинаковой. Для описания конструкции векторов $\mathbf{S}_i$ выберем такую декартову систему координат, в которой ось *z* направлена перпендикулярно антенной решетке, а оси *x* и *y* расположены в плоскости антенной решетки параллельно ее сторонам. В проекциях на плоскости *xOz* и *yOz* вычисляются углы $\varphi_{x,i}$ и $\varphi_{y,i}$ между проекциями направления фронта волны от i −ой помехи и осью *z*, а также углы $\varphi_{0,x}$ и $\varphi_{0,y}$ между проекциями ориентации антенной решетки и осью z. С помощью этих углов определяются обобщенные координаты помех по формулам

$$\psi_i = (2\pi/\lambda) d (\sin\varphi_{x,i} - \sin\varphi_{0,x}), \ \theta_i = (2\pi/\lambda) d (\sin\varphi_{y,i} - \sin\varphi_{0,y}), \quad (2)$$

где *d* расстояние между соседними излучателями по горизонтали и вертикали, λ − длина волны на которой ведется пеленгация.

В [2] показано, что при построчном расположении компонент N–мерных векторов $\mathbf{S}_i$ имеет место представление

$$\mathbf{S}_i = \{F(\psi_i, \theta_i, p, q) : p = 0, q = 0, \ldots, Q-1, p = 1, q = 0, \ldots, Q-1, \ldots, \\ \ldots, p = P-1, q = 0, \ldots, Q-1\}, \tag{3}$$

где $F(\psi, \theta, p, q) = \exp[j(\psi p + \theta q)]$.

Обозначим буквой $\mathbf{S}$ вектор поиска, определяемый по формулам (3), в которых аргументы ψ_i, θ_i заменены на текущие аргументы ψ, θ.

Чтобы рассмотреть схему работы пеленгации по методу Кейпона, введем разрешающую функцию помех

$$\eta(\psi, \theta) = 1 / (\mathbf{S}^H(\psi, \theta)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}(\psi, \theta)). \tag{4}$$

Здесь вектор поиска $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\psi, \theta)$ варьируется в зависимости от изменения переменных ψ, θ. Согласно методике применения метода Кейпона первые I наибольших резко выраженных локальных максимумов этой функции указывают на наличие в соответствующих направлениях (ψ, θ) активных помех.

При наличии только одной помехи метод Кейпона подробно исследован в ряде источников (см., например, [2]) и хорошо работает при достаточно больших значениях отношения сигнал/шум. Существуют несколько причин, по которым метод Кейпона может приводить к неправильным результатам при наличии нескольких помех. Это связано с геометрией расположения помех в пространстве, в частности, с недостаточной линейной независимостью векторов помех. Для исследования этого вопроса требуется исследовать условия линейной независимости векторов и ввести меры линейной независимости векторов.

Используемые математические результаты

Новые математические результаты приведены без доказательств.

Положим $\mathbf{r} = \sum_{i=0}^{I} \sigma_i^2 \mathbf{S}_i \mathbf{S}_i^H$. Векторы $\mathbf{S}_i$ предполагаются линейно независимыми, поэтому ранг эрмитовой матрицы $\mathbf{r}$ равен I, а ее собственные числа неотрицательны. Таким образом, можно считать, что $\lambda_1^2 > \lambda_2^2 > \ldots > \lambda_I^2 > \lambda_{I+1}^2 = 0 = \ldots = \lambda_N^2 = 0$, поэтому собственные числа ковариационной матрицы $\mathbf{R}$ можно записать в виде $\lambda_1^2 + \mu^2 > \lambda_2^2 + \mu^2 > \ldots > \lambda_I^2 + \mu^2 > \lambda_{I+1}^2 = \mu^2 = \ldots = \lambda_N^2 = \mu^2$. Пусть $\mathbf{U}_1, \ldots, \mathbf{U}_I$ – ортонормированные собственные векторы матрицы $\mathbf{r}$, соответствующие собственным числам $\lambda_1^2 > \lambda_2^2 > \ldots > \lambda_I^2$. Эти векторы одновременно являются собственными векторами матрицы $\mathbf{R}$, соответствующими собственным числам $\lambda_1^2 + \mu^2 > \lambda_2^2 + \mu^2 > \ldots > \lambda_I^2 + \mu^2$.

I – мерное линейное пространство H, порожденное векторами $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_I$, называется сигнальным пространством, а его ортогональное дополнение – шумовым пространством.

Теорема 1. *Линейное подпространство, порожденное векторами* $\mathbf{U}_1, \ldots, \mathbf{U}_I$ *совпадает с сигнальным пространством.*

Пусть $\mathbf{F} = (\sigma_1 \mathbf{S}_1, \ldots, \sigma_I \mathbf{S}_I)$ – матрица, построенная по векторам $\sigma_i \mathbf{S}_i$. Тогда положительные собственные числа матриц

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}\mathbf{F}^H, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{F}^H\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \mathbf{S}_1^H \mathbf{S}_1 & \cdots & \sigma_1 \sigma_I \mathbf{S}_1^H \mathbf{S}_I \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_I \sigma_1 \mathbf{S}_I^H \mathbf{S}_1 & \ldots & \sigma_I^2 \mathbf{S}_I^H \mathbf{S}_I \end{pmatrix}$$

совпадают (см. [4], с. 252).

Таким образом, исследование спектра матрицы $\mathbf{r}$ сводится к исследованию спектра матрицы $\mathbf{r}_1$.

Определим матрицу направлений $\mathbf{V}$, столбцы которой состоят из последовательно расположенных векторов $\mathbf{S}_i$. Она не зависит от мощностей помех, а зависит только от направлений на помехи.

Обозначим через $\mathbf{T}$ матрицу

$$\mathbf{T} = \mathbf{V}^H\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1^H\mathbf{S}_1 & \cdots & \mathbf{S}_1^H\mathbf{S}_I \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{S}_I^H\mathbf{S}_1 & \ldots & \mathbf{S}_I^H\mathbf{S}_I \end{pmatrix}.$$

Ее ранг равен I (см. [5], с. 195). Отметим, что она, как и матрица $\mathbf{V}$, не зависит от мощностей помех, а зависит только от их обобщенных координат. Обозначим $t_1^2 \geq t_2^2 \geq \ldots \geq t_I^2$ ненулевые собственные числа матрицы $\mathbf{T}$.

Теорема 2. *Имеет место неравенство*

$$\sigma_{min}^2 t_{\min}^2 \leq \lambda_i^2 \leq \sigma_{max}^2 t_{\max}^2,\ i \leq I,$$

где $\sigma_{min}^2, t_{\min}^2, \sigma_{max}^2, t_{\max}^2$ *обозначают наибольшие и наименьшие значения соответствующих множеств чисел.*

Теорема 2 показывает, что с ростом мощностей помех собственные числа корреляционной матрицы помех в целом растут, но могут встречаться исключения, связанные с малыми значениями величины $t_{\min}^2$. Обсудим геометрический смысл этой величины.

Известно (см. [4]), что для невырожденных квадратных матриц $t_{\min}^2 = \min_{\mathbf{x}\neq 0} \dfrac{(\mathbf{Tx},\mathbf{x})}{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$. Простые вычисления показывают, что $(\mathbf{Tx},\mathbf{x}) = \left\| \sum_{i=1}^{I} x_i \mathbf{S}_i \right\|^2$, где x_i - компоненты вектора $\mathbf{x}$, поэтому $t_{\min}^2 = \min_{(\mathbf{x},\mathbf{x})=1} \left\| \sum_{i=1}^{I} x_i \mathbf{S}_i \right\|^2$. Линейная зависимость векторов $\mathbf{S}_i$ определяется наличием такого вектора x, для которого $\sum_{i=1}^{I} x_i \mathbf{S}_i = 0$, т.е. соотношением $t_{\min}^2 = 0$. Линейная независимость векторов $\mathbf{S}_i$ определяется неравенством $t_{\min}^2 > 0$. Таким образом, с учетом нормированности векторов $\mathbf{S}_i$, величину $t_{\min}^2$ можно рассматривать как меру их линейной зависимости. Это утверждение подкрепим еще одним геометрическим замечанием.

Линейный оператор, порожденный матрицей $\mathbf{V}^H = (\mathbf{S}_1,\ldots,\mathbf{S}_I)^H$, переводит единичную сферу пространства R^N в эллипсоид пространства R^I с полуосями $t_1,\ldots,t_I$. Следовательно, $t_{\min}$ – это значение длины самой короткой полуоси, т.е. является коэффициентом сжатия единичной сферы в наиболее сжимаемом направлении. Отметим также, что в вычислительной математике в качестве меры линейной зависимости векторов используется число обусловленности матрицы $\mathbf{T}$, равное отношению чисел $t_{\max}$ и $t_{\min}$. Для нормированных векторов эта характеристика как и $t_{\min}$ определяет степень вырожденности сигнального пространства.

Также мерой зависимости векторов часто считают модуль определителя матрицы, который, как известно, равен объему параллелепипеда, построенного по ее столбцам, однако, большие значения определителя могут обеспечиваться за счет первых собственных чисел.

Приведенная геометрическая интерпретация пригодна и для собственных чисел $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ и матрицы $(\sigma_1\mathbf{S}_1,\ldots,\sigma_I\mathbf{S}_I)$.

Перейдем от рассуждений о мерах линейной независимости векторов $\mathbf{S}_i$ к исследованию условий их точной линейной независимости.

Теорема 3. *Пусть векторы* $\mathbf{S}_i$ *определены равенством*

$$\mathbf{S}_i = \{\exp[\,j(\psi_i p + \theta_i q)],\ p \le P,\, q \le Q\}.$$

Тогда

а) если все координаты θ_i *одинаковы, т.е.* $\theta_i = \theta, \quad i = 1, 2, ..., I$, *то векторы* $\mathbf{S}_i$ *линейно независимы, при условии, что они различны и* $I \le P$*;*

б) если все координаты ψ_i *одинаковы, т.е.* $\psi_i = \psi, \quad i = 1, 2, ..., I$, *то векторы* $\mathbf{S}_i$ *линейно независимы, при условии, что они различны и* $I \le Q$.

Теорема 4. *Предположим, что числа* $\exp[\,j\psi_i], i = 1, ..., I,$ *различны и числа* $\exp[\,j\theta_i], i = 1, ..., I,$ *также различны. Тогда, если* $I \le P + Q - 1$, *то векторы* $\mathbf{S}_i$ *линейно независимы.*

Теорема 5. *Предположим, что среди векторов* $\mathbf{S}_i$ *нет совпадающих. Тогда векторы* $\mathbf{S}_i, i \le I,$ *линейно независимы, если* $I \le \max(P, Q)$.

Исследование алгоритма Кейпона

Разложим вектор поиска $\mathbf{S}$ по собственным векторам ковариационной матрицы $\mathbf{U}_1, ..., \mathbf{U}_N$, положив $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{U}_i$. Предполагается, что помеха некоррелирована с шумом. Тогда из рассуждений, приведенных в [2], легко следует, что решающую функцию (4) можно переписать в виде, зависящем только от собственных чисел ковариационной матрицы и коэффициентов разложения $\mathbf{S}$

$$\eta = \frac{1}{\sum_{i=1}^{I} \frac{|\alpha_i|^2}{\lambda_i^2 + \mu^2} + \frac{1}{\mu^2} \sum_{i=I+1}^{N} |\alpha_i|^2}. \qquad (5)$$

Если вектор поиска $\mathbf{S}$ принадлежит сигнальному пространству, то в силу (5)

$$\eta = \eta_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{I} \frac{|\alpha_i|^2}{\lambda_i^2 + \mu^2}}. \qquad (6)$$

Если вектор поиска $\mathbf{S}$ принадлежит шумовому пространству, то $\|\mathbf{S}\|^2 = N$, и выражение (5) принимает вид

$$\eta = \eta_2 = \frac{\mu^2}{\sum_{i=r+1}^{N} |\alpha_i|^2} = \frac{\mu^2}{N}. \qquad (7)$$

Из соотношений (6), (7) и теоремы 1 получим

$$\rho^2 t_{\min}^2 \frac{\eta_1}{\eta_2} \ge \frac{\lambda_{\min}^2}{\mu^2} + 1 \ge \frac{\sigma_{\min}^2 t_{\min}^2}{\mu^2} + 1 \ge \rho^2 t_{\min}^2 + 1 \qquad (8)$$

Число ρ^2 предполагается большим, поэтому для большинства возможных ситуаций, в которых величина $t_{\min}^2$ не слишком мала, формула (8) показывает различное поведение функции рельефа на сигнальном и шумовом пространствах. Однако известны только грубые оценки снизу для $t^2_{\min}$. Они основаны на применении теоремы Гершгорина [6].

Если квадрат проекции вектора $\mathbf{S}$ на шумовое пространство $\sum_{i=I+1}^{N} |\alpha_i|^2$ велик по сравнению с мощностью шума, то отношение (6) будет мало, и функция рельефа укажет на отсутствие помехи в соответствующей точке.

Если квадрат проекции вектора поиска на шумовое пространство мал по сравнению с мощностью шума, то вектор поиска практически попадает в сигнальное пространство, что автоматически означает его близость к вектору координат одной из помех. Однако в этом случае можно гарантировать, что отношение (6) велико, только если $t^2_{\min}$ значительно больше μ^2.

Заключение

На основании математического исследования возможностей использования метода Кейпона для пеленгации одновременно нескольких помех можно сделать следующий вывод:

Для простейшего типа помех, используя метод Кейпона, нельзя получить ложные помехи, но можно при малых значениях $t^2_{\min}$ пропустить помехи даже большой мощности, если значение $t^2_{\min}$ соизмеримо с мощностью шума.

Литература

1. Кейпон Дж. Пространственно-временной спектральный анализ с высоким разрешением.// ТИИЭР, 1969, Т. 57, №2. С. 59-69.
2. Ермолаев В.Т., Флексман А.Т. Методы оценивания параметров источников сигналов и помех, принимаемых антенной решеткой / Учебно-методические материалы. Инновационная образовательная программа ННГУ, 2007. 100 с.
3. Егоров В. А., Кондыбаев Н. С. Исследование свойств алгоритма Кейпона в задачах пеленгации стационарных активных помех. // Компьютерные инструменты в образовании, 2011, № 3. С. 61-69.
4. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980. 400 с.
5. Рао С.Р. Линейные статистические методы. М: Наука, 1968. 547 с.
6. Ланкастер П. Теория матриц. М: Наука, 1978. 280 с.

INVESTIGATION OF CAPON'S ALGORITHM IN THE TASKS OF DETECTING SOURCES

Egorov Vladimir Alekseyevich,
St. Petersburg, Russia, 44eva@rambler.ru

Kondybaev Nurlan Sakenovich,
St. Petersburg, Russia, nurkon@yandex.ru

Saprykin Alexander Alexandrovich,
St. Petersburg, Russia, saprykin.spb@gmail.com

Abstract. The task of the direction-finding of sources with the aid of the simplest antenna array (AR) is examined. Both the usual amplitude methods and the methods of the high resolution, based at the analysis of the covariance matrix of data, removed with AR adapt for the solution of this problem.
One of such methods is the method of Capon, which has a number of advantages over amplitude methods. As a result studies of the work of Capon's algorithm with real data and data, obtained with the aid of the computer simulation, was explained that the algorithm works excellently with some configurations of the coordinates of sources, but it does not work completely with others, or it passes interferences with large power.
Work gives the mathematical developments, which help to separate "good" configurations of coordinates from "the poor". These mathematical developments widely use an apparatus of linear algebra.
Keywords: direction-finding, antenna array, covariance matrix, Capon's algorithm, sources, the vector of search, signal space, noise space, local maximum, the linearly independent vectors, independent noise.
The task of the direction-finding of sources with the aid of the simplest antenna array (AR) is examined. Both the usual amplitude methods and the methods of the high resolution, based at the analysis of the covariance matrix of data, removed with AR adapt for the solution of this problem.
One of such methods is the method of Capon, which has a number of advantages over amplitude methods. As a result studies of the work of Capon's algorithm with real data and data, obtained with the aid of the computer simulation, was explained that the algorithm works excellently with some configurations of the coordinates of sources, but it does not work completely with others, or it passes interferences with large power.
Work gives the mathematical developments, which help to separate "good" configurations of coordinates from "the poor". These mathematical developments widely use an apparatus of linear algebra.

Keywords: direction-finding, antenna array, covariance matrix, Capon's algorithm, sources, the vector of search, signal space, noise space, local maximum, the linearly independent vectors, independent noise.

References

1. J. Capon, "High-Resolution Frequency-Wavenumber Spectrum Analysis," *Proc. IEEE* **57** (8), 1969, pp. 1408–1419.
2. Ermolaev V.T., Flexman A.T. Metody otcenivaniya parametrov istochnikov signalov I pomeh, prinimaemyh antennoy reshetkoy. Uchebno-metodicheskie materialy. Innovatcionnaya obrazovatelnaya programma NNGU, 2007. 100 s.
3. Egorov V.A., Kondybaev N.S. Issledovanie svoystv algoritma Keypona v zadachah pelengatcii statcionarnyh aktivnyh pomeh.// komp'uternye instrumenty v obrazovanii, 2011, № 3. S. 61-69.
4. Voevodin V.V. Lineynaya algebra, M. Nauka, 1980. 400 s.
5. Rao C.R., Linear statistical inference and its applications, second Edition, New York. John Wiley & Sons. 1973. XX. 625 s.
6. Lankaster P. Theory of matrices, Acadtmic Press, New York- London, 1969. 280 s.

Information about authors:
Egorov V.A., professor, the department of higher mathematics of St. Petersburg state electrotechnical university and Saint Petersburg national research university of information technologies, precision mechanics and optics (ITMO).
Kondybaev Nurlan Sakenovich, the division head, St. Petersburg branch Joint Stock Company «Academician A.L.Mints Radiotechnical Institute» (RTI).
Saprykin Alexander Alexandrovich the graduate student of the Saint Petersburg national research university of information technologies, precision mechanics and optics (ITMO).