

ЗАДАЧА МАРШРУТИЗАЦИИ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ НА ГРАФЕ РЕПЕРНЫХ ТОЧЕК

Аллилуева Наталья Владимировна,

ведущий специалист
акционерного общества
«Научно-производственное предприятие
«Радар ММС 1»»,
г. Санкт-Петербург, Россия,
allilueva_nv@radar-mms.com

Руденко Эдуард Михайлович,

к.т.н., доцент филиала
Военной академии ракетных войск
стратегического назначения
им. Петра Великого,
г. Серпухов, Россия,
eduard5529@yandex.ru

АННОТАЦИЯ

Рассматривается расчет маршрутов БПЛА на графе реперных точек на местности. Математическая модель основана на построении целевой функции нескольких переменных, заданной на ребрах и на вершинах математического графа. Аргумент целевой функции, минимизирующий ее значение, представляет собой последовательность номеров реперных точек оптимального замкнутого маршрута, проходящего по всем ребрам графа. Статья отражает взаимосвязь прикладной задачи маршрутизации БПЛА на местности с математической задачей оптимизации на графах средствами генетического алгоритма.

Ключевые слова: математический граф; реперные точки на местности; оптимальные замкнутые маршруты; автоморфизмы графа; целевая функция; генетический алгоритм.

Для цитирования: Аллилуева Н.В., Руденко Э.М. Задача маршрутизации беспилотных летательных аппаратов на графе реперных точек, // I-methods. 2018. Т.10. №1. С. 05-18.

Планирование маршрута беспилотного летательного аппарата (БПЛА) на множестве реперных точек на местности является составной частью задачи маршрутизации, состоящей в расчете множества возможных маршрутов и выбора из них тех маршрутов, которые удовлетворяют плану применения в одиночном или групповом полете. В данной статье рассматривается подход к решению задачи планирования маршрутов на множестве реперных точек на местности и автоматизации процессов управления БПЛА [1].

Полет БПЛА по множеству реперных точек на местности можно рассматривать как маршрут на математическом графе, ребра которого, соединяют некоторые пары реперных точек как вершины. При этом можно считать, что маршрут является замкнутым, то есть начальная и конечная точки маршрута совпадают и маршрут проходит через все ребра графа. Для выбора маршрута достаточно предполагать, что граф является помеченным и взвешенным, то есть вершинам присвоены номера, а каждому ребру дан вес равный 1. Граф считается неориентированным. В качестве начальной и конечной вершины маршрута можно взять вершину с любым номером.

Расчет множества замкнутых маршрутов (задача планирования) может быть сведена к оптимизационной задаче поиска замкнутых маршрутов минимальной длины, содержащим все ребра графа (некоторые ребра могут встретиться несколько раз).

В теории графов [2] множество вершин обозначается V , множество ребер E . Пара $G = (V, E)$

Планирование маршрута БПЛА на множестве реперных точек на местности является составной частью задачи маршрутизации, состоящей в расчете множества возможных маршрутов и выбора из них тех маршрутов, которые удовлетворяют плану применения в одиночном или групповом полете. В данной статье рассматривается подход к решению задачи планирования маршрутов на множестве реперных точек на местности и автоматизации процессов управления БПЛА [1].

Полет БПЛА по множеству реперных точек на местности можно рассматривать как маршрут на математическом графе, ребра которого, соединяют некоторые пары реперных точек как вершины. При этом можно считать, что маршрут является замкнутым, то есть начальная и конечная точки маршрута совпадают и маршрут проходит через все ребра графа. Для выбора маршрута достаточно предполагать, что граф является помеченным и взвешенным, то есть вершинам присвоены номера, а каждому ребру дан вес равный 1. Граф считается неориентированным. В качестве начальной и конечной вершины маршрута можно взять вершину с любым номером.

Расчет множества замкнутых маршрутов (задача планирования) может быть сведена к оптимизационной задаче поиска замкнутых маршрутов минимальной длины, содержащим все ребра графа (некоторые ребра могут встретиться несколько раз).

В теории графов [2] множество вершин обозначается V , множество ребер E . Пара $G = (V, E)$ называется графом. Множество вершин обозначается через $V = \{v_i\}, i = 1, \dots, n$. С каждой вершиной v в графе связана величина кратности $\rho(v)$, равная числу ребер сходящихся в эту вершину, эти ребра называются инцидентными вершине и между собой. Ребра представляются в виде пары вершин $e_{ij} = (v_i, v_j)$. Маршрут на графе можно представить в виде последовательности соединенных ребрами вершин и ребер

$$m = (v_1, v_2, \dots, v_{k+1}) = (e_1, e_2, \dots, e_k), \tag{1}$$

где $e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_2, v_3), \dots, e_{k-1} = (v_k, v_{k+1})$ – попарно инцидентные ребра, вершина v_2 инцидентна ребрам e_1 и e_2 и v_2 инцидентна v_1, v_3 . Так как рассматриваются неориентированные графы, то ребра (v_i, v_j) и (v_j, v_i) считаются одинаковыми. В маршруте (1) будем предполагать, что нет повторяющихся рядом стоящих одинаковых вершин, то есть, нет петель вида $e = (v_i, v_i)$. В последовательности ребер маршрута могут встретиться одинаковые, то есть маршрут может не быть цепью. Для дальнейшего условимся, что эти ребра хотя и обозначаются одинаково, но будут различаться, как параллельные ребра с одинаковыми вершинами начала и конца. Такие ребра называются кратными.

В качестве примера рассмотрим граф реперных точек на местности, который очерчен черным сплошным контуром (рис.1).

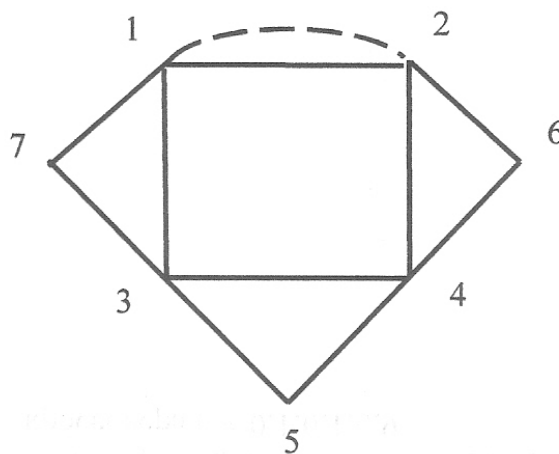


Рис.1. Граф реперных точек на местности

Можно проверить, что граф (рис.1) с добавлением пунктирного кратного ребра (1,2) становится эйлеровым, так как у него все вершины четные. Эйлеровы графы характеризуются тем, что только на них можно построить замкнутый маршрут, проходящий через все ребра [2].

Длина маршрута m обозначается $d(m)$ и равна числу ребер, входящих в маршрут. Для маршрута $m = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ длина равна

$$d(m) = k. \tag{2}$$

Если известны кратности вершин эйлерова графа, то длина наименьшего замкнутого маршрута равна полусумме всех кратностей вершин

$$d(m) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho(v_i). \tag{3}$$

Для графа (рис.1) длина наименьшего замкнутого маршрута по формуле (3) равна $d(m) = 11$ и кратное ребро (1,2) проходится дважды.

В отличие от традиционной задачи коммивояжера задача планирования маршрута на графе состоит не в определении длины маршрута, которая согласно формулы (3) легко вычисляется, а в определении множества замкнутых маршрутов.

Постановка задачи нахождения оптимальных замкнутых маршрутов (ОЗМ)

Очевидно, что множество планируемых (возможных) замкнутых маршрутов наименьшей длины можно найти в результате решения оптимизационной задачи.

Математическая постановка задачи нахождения множества $M = \{m\}$ оптимальных замкнутых маршрутов (ОЗМ) на графе имеет вид:

$$\begin{aligned} M &= \operatorname{argmin} d(m) \\ m &= (e_1, e_2, \dots, e_k), M = \{m\} \\ E &\subseteq \{e_1, e_2, \dots, e_k\}, e_1 = (v_1, v_2), e_k = (v_k, v_{k+1}), v_1 = v_{k+1} \\ &\{e_1, e_2, \dots, e_k\} \cap \{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{is}\} = \emptyset. \end{aligned} \tag{4}$$

Эта задача относится к задачам на условный экстремум. Условие отсутствия кратных ребер из набора $\{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{is}\}$ является актуальным, когда граф достраивается до эйлерова графа различными способами [3].

Решение оптимизационной задачи (4) состоит в нахождении такой замкнутой последовательности ребер $m = (e_1, e_2, \dots, e_k)$, содержащей все ребра графа и имеющей минимальную длину.

Нетрудно проверить, что множество решений задачи (4) для графа (рис.1), имеющие длину равную 11, составляет значительное количество.

Например, маршруты $m_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}) = (1, 2, 6, 4, 5, 3, 7, 1, 3, 4, 2, 1)$, $m_2 = (1, 2, 6, 4, 5, 3, 7, 1, 2, 4, 3, 1)$ и $m_3 = (1, 2, 4, 3, 1, 2, 6, 4, 5, 3, 7, 1)$ и т.д. являются решениями оптимизационной задачи (4).

Задача (4) определения множества ОЗМ не зависит от выбора начальной и конечной вершины $v_1 = v_k$. Множество ОЗМ для любой точки графа, выбранной в качестве конечных вершин, не меняется, а просто изменяет форму записи. Это вытекает из преобразования $\gamma_{раз}$, которое переводит форму записи любого элемента множества ОЗМ, но не меняет сам маршрут.

Например, для маршрута преобразование $\gamma_{раз,4}$ в первой встретившейся слева вершине с номером 4 приводит к тому же ОЗМ, но с конечными точками в вершине с номером 4: $m_1 = (1, 2, 6, 4, 5, 3, 7, 1, 3, 4, 2, 1) \rightarrow (1, 2, 6, 4), (4, 5, 3, 7, 1, 3, 4, 2, 1) \rightarrow (4, 5, 3, 7, 1, 3, 4, 2, 1), (1, 2, 6, 4) \rightarrow (4, 5, 3, 7, 1, 3, 4, 2, 1, 2, 6, 4) = \gamma_{раз,4}(m_1)$.

Перечислить все ОЗМ для графа является комбинаторной задачей по перебору компонент вектора $m = (x_1, x_2, \dots, x_{12})$, у которого каждый номер неизвестной величины x_i меняется в

целочисленном множестве $\{1, 2, \dots, 7\}$. Количество вариантов перебора компонент вектора m при фиксированных первой и конечной точки равно $7^{10} = 282475249$.

Оптимизационная задача (4) имеет множество решений и относится к разделу целочисленного программирования и для ее решения может быть применен метод генетического алгоритма (ГА), который позволяет минимизировать функции нескольких переменных произвольной природы [1, 3, 4, 5].

Функция $d(m)$ достигает значения равного 11, например, на замкнутом маршруте вида (1, 2, 4, 3, 1, 7, 3, 1, 7, 1, 7, 1), который не удовлетворяет условиям, перечисленным в задаче (4) прохождению по всем ребрам. Поэтому задача (4) является задачей на условный экстремум. Для преобразования этой задачи в безусловный экстремум необходимо построить целевую функцию $Z(m)$, которая будет достигать минимум равный 11 только на множестве ОЗМ

$$\begin{aligned} \text{ОЗМ} &= \operatorname{argmin} Z(m), \\ m &= (1, x_1, x_2, \dots, x_{10}, 1) \in 1 \times \{1, 2, \dots, 7\}^{10} \times 1 \end{aligned}$$

где $\{1, 2, \dots, 7\}^{10}$ – декартово произведение множества чисел $\{1, 2, \dots, 7\}$. Отметим, что здесь неизвестными целыми положительными значениями являются номера вершин x_1, x_2, \dots, x_{10} из множества $\{1, 2, \dots, 7\}$.

В данной статье рассматривается алгоритм построения аналитической целевой функции $Z(m)$, минимум которой достигается на множестве ОЗМ связанных графов. Множество ОЗМ позволяет планировать одиночный и групповой полет БПЛА, подчиненный различным условиям.

Алгоритм построения целевой функции

Алгоритм построения целевой функции основан на вычислении функции нескольких переменных $Z(m) = Z(x_1, x_2, \dots, x_{10})$, состоящей из суммы функций, заданных на ребрах и на вершинах графа.

Функция, заданная на ребрах, реализует принцип штрафования ребер, не принадлежащих графу, но которые могут быть сгенерированы ГА.

Функции, заданные на вершинах содержат слагаемые, которые учитывают тип эйлера графа, используемый при облете номеров реперных точек на местности. Другие функции от вершин графа учитывают кратность вершин графа.

Алгоритм расчета целевой функции рассмотрим для случая графа (рис.1). Он включает в себя следующие пункты:

1. Построение функции заданной на ребрах графа.

Определяется множество разрешенных или допустимых для облета БПЛА ребер на графе реперных точек на местности. Для графа (рис.1) это ребра: (1,2), (1,3), (1,7), (2,4), (2,6), (3,4), (3,5), (3,7), (4,5), (4,6). Это множество допустимых к облету ребер обозначим через A . На ребрах множества A , целевая функция должна принимать значение равное весу ребра. Для планирования маршрутов полета БПЛА вес всех допустимых ребер считается равным 1.

Применение ГА в качестве средства оптимизации может привести к появлению недопустимых петель при вершинах, то есть появление пар (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7). Целевая функция на петлях должна принимать значения больше веса 1, чем на допустимых ребрах, например, значение 2.

Если при мониторинге графа реперных точек на местности не допускается перелет между точками с номерами 1 и 4, минуя точку 2 или 3, то в состав маршрутов БПЛА не входит ребро (1,4). Это означает, что все маршруты прокладываются по ребрам на эйлеровом графе (рис.1). В этом случае ребро (1,4) относится к множеству запрещенных или недопустимых ребер и на нем целевая функция должна принимать также значение 2. Множество запрещенных ребер: (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,5), (2,7), (3,6), (4,7), (5,6), (5,7), (6,7) и петель (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7) образуют множество B .

Множества A и B можно представить точками декартовой системы координат на плоскости. Они расположены симметричны относительно биссектрисы первого квадрата, так как ребра (x,y) и

(y,x) считаются одинаковыми. Свойство симметричности позволяет увидеть, что на гиперболах $x \cdot y = n$ находятся только точки одного множества A или B .

Определив разрешенные ребра (множество A) и запрещенные петли и ребра (множество B) для построения целевой функции необходимо разделить множества A и B . Для этого подбирается симметричная функция от двух переменных $f(x,y)$, множество значений которой $S = f(A)$ и $P = f(B)$ не пересекаются: $f(A) \cap f(B) = S \cap P = \emptyset$.

В качестве такой функции возьмем, например, $f(x,y) = 2 \cdot x \cdot y - (x + y)$. Эта функция симметрична $f(x,y) = f(y,x)$, так как она должна принимать одинаковые значения на ребрах $(x,y) = (y,x)$ неориентированного графа.

Для допустимого множества ребер A : $s(1) = f(1,2)$; $s(2) = f(1,3)$; $s(3) = f(1,7)$; $s(4) = f(2,4)$; $s(5) = f(2,6)$; $s(6) = f(3,4)$; $s(7) = f(3,5)$; $s(8) = f(3,7)$; $s(9) = f(4,6)$; $s(10) = f(4,5)$.

Для множества запрещенных петель и ребер B : $p(1) = f(1,4)$; $p(2) = f(1,5)$; $p(3) = f(1,6)$; $p(4) = f(2,3)$; $p(5) = f(2,5)$; $p(6) = f(2,7)$; $p(7) = f(3,6)$; $p(8) = f(4,7)$; $p(9) = f(5,6)$; $p(10) = f(5,7)$; $p(11) = f(6,7)$; $p(12) = f(1,1)$; $p(13) = f(2,2)$; $p(14) = f(3,3)$; $p(15) = f(4,4)$; $p(16) = f(5,5)$; $p(17) = f(6,6)$; $p(18) = f(7,7)$.

Отсюда $P = \{3, 4, 5, 7, 13, 19, 27, 45, 49, 58, 71, 0, 4, 12, 24, 40, 60, 84\}$ и $S = \{1, 2, 6, 10, 16, 17, 22, 32, 31, 38\}$ и $P \cap S = \emptyset$.

Для построения целевой функции на ребрах подберем интерполяционную функцию, которая на области значений допустимых ребер $f(A)$ переходит в 1, на области значений запрещенных петель и ребер $f(B)$ принимает значение 2 (это значение штрафа). Исходными данными для построения интерполяции являются два вектора: $X = P \cup S$ и $Y = [\text{ones}(1, \text{length}(S)), \text{ones}(1, \text{length}(P)) + 1]$. Здесь $\text{ones}(1, \cdot)$ и $\text{ones}(1, \cdot) + 1$ – вектора из единиц и двоек, length – оператор из пакета Matlab вычисления длины векторов P и S [6].

Используя кубическую сплайн-интерполяцию interp1 из пакета Matlab, получим множество значений $y = \text{interp1}(X, Y, x, 'spline')$ при $x = 0 : \max(X)$ (рис.2).

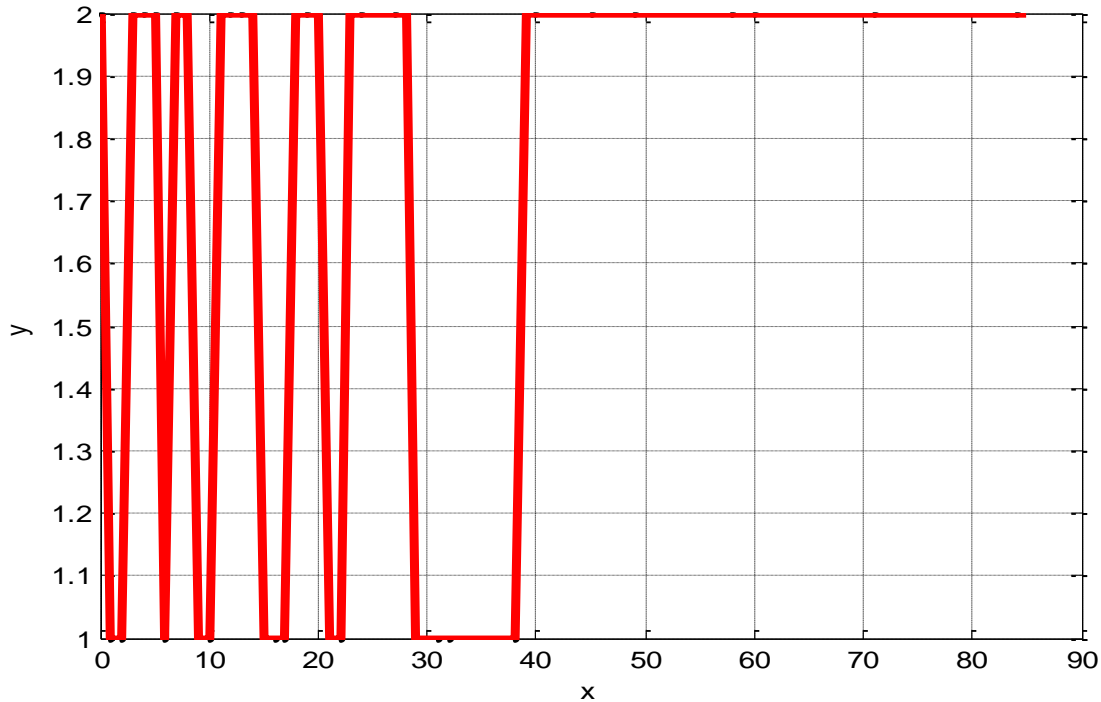


Рис.2. График кубической сплайн-интерполяции $\text{interp1}(x)$

Композиция функции интерполяции и разделяющей функции $\text{interp1}(f(x,y))$ на разрешенных ребрах (x,y) принимает значение 1, а на петлях (x,x) и запрещенных ребрах значение 2.

Это позволяет построить функцию по формуле

$$Z_1(m) = Z_1(x_1, x_2, \dots, x_{i_0}) = \sum_{i=1}^{i_0} \text{intrp1}(f(x_i, x_{i+1})), \quad (5)$$

для которой достигается минимум на ОЗМ: $\min Z_1(m) = 11$, так как $\text{interp1}(f(x,y)) \geq 1$. Можно проверить, что на маршрутах m_1 и m_2 функция (5) принимает значение 11. Значение 11 может быть достигнуто и на наборе $m_0 = (1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2)$, так как ребро $(1, 2)$ входит в граф и на нем $\text{interp1}(f(1,2)) = \text{interp1}(f(2,1)) = 1$, но набор m_0 не является ОЗМ, так как не проходит по всем ребрам графа.

Для отфильтрования ОЗМ от наборов типа m_0 , но которые могут быть сгенерированы ГА, необходимо к функции (5) добавить функцию, которая учитывает прохождение маршрута по всем ребрам графа а, следовательно, и вершинам.

2. Построение функции модели эйлерова графа (МЭГ).

Из геометрии графа (рис.1) следует, что граф может быть достроен до эйлерова графа удвоением ребра $(1, 2)$ [7]. Если для облета на местности реперных точек, образующих граф, выбрана МЭГ (рис.1), то функция $f(x, y) = x \cdot y - n$ при разных целых $n > 0$ проходит либо по точкам множества А, либо по множеству В. Поэтому, если ребро (m_i, m_{i+1}) принадлежит ОЗМ, то кривая $x \cdot y - m_i \cdot m_{i+1} = 0$ проходит только по точкам множества А. Сумма $x \cdot y - m_i \cdot m_{i+1}$ по всем возможным произведениям $m_i \cdot m_{i+1}$, где ребро (m_i, m_{i+1}) принадлежит ОЗМ, будет на любом ОЗМ равна нулю.

Отсюда следует, что любой ОЗМ для МЭГ (рис.1) (в частности и маршруты m_1 и m_2) удовлетворяют соотношению

$$Z_2(m) = Z_2(x_1, x_2, \dots, x_{i_2}) = \sum_{i=1}^{i_2} x_i \cdot x_{i+1} - 126 = 0. \quad (6)$$

Выражение (6) описывает циклическую (круговую) сумму произведений номеров вершин замкнутого маршрута и не зависит от номера начальной и конечной вершины и, следовательно, является инвариантом МЭГ.

Следует отметить, что для выбранной МЭГ протяженность всех ОЗМ, например, в километрах, будет одинакова, так как количество пройденных ребер будет одно и то же.

Если граф допускает несколько МЭГ, то протяженность ОЗМ для разных МЭГ будет разной. Это следует из способа построения МЭГ путем добавления кратных ребер.

Оказывается одновременное выполнение обоих выражений (5) и (6) не позволяет отсеять только ОЗМ. Это подтверждают численные эксперименты.

Для отбора оптимальных маршрутов необходимо получение еще нескольких функций, заданных на вершинах графа.

3. Построение функций вершин графа.

Рассмотрим следующее выражение, справедливость которого для ОЗМ эйлерова графа (рис.1) легко проверяется на маршрутах m_1 и m_2

$$Z_3(m) = \sum_{i=1}^{12} x_i - 39 = 0. \quad (7)$$

Здесь константа 39 получается по правилу $39 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (2 + 3 + 4) + 5 + 6 + 7$, которое следует из закономерности повторяемости в ОЗМ номеров вершин. Повторяемость номеров 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 равна половине кратности вершин и учету того, что маршрут начинается и заканчивается в вер-

шине с номером 1. В качестве выражения (7) могут быть использованы также суммы различных степеней переменных x_i^k .

4. Составление целевой функции графа.

Для ОЗМ эйлера графа *рисунка 1* целевая функции равны сумме 3-х слагаемых соответствующих целевых функций ребер, эйлеровых моделей и вершин

$$Z(m) = Z_1(m) + abs(Z_2(m)) + abs(Z_3(m)). \quad (8)$$

Проверка функции (8) на маршрутах m_1 и m_2 показывает, $Z(m) = d(m) = 11$.

Если рассматривать функцию

$$Z(m) = abs((Z_1(m) - 11) + abs(Z_2(m)) + abs(Z_3(m))), \quad (9)$$

то на ОЗМ она будет равна нулю и это будет ее минимальным значением.

Задача минимизации функции (9), состоящей из суммы слагаемых, в отличии от задачи (4) относится к безусловной оптимизации.

Здесь каждое слагаемое берется по абсолютной величине, так как численный эксперимент показывает, что ГА генерирует такие наборы, которые не являются ОЗМ, и одни функции $Z_i(m)$ суммы (9) отрицательные, а другие положительные и в сумме могут давать нуль.

Каждое слагаемое целевой функции представляет собой многочлен от нескольких переменных и алгоритм поиска его корней является полиномиальным [8, 9].

Минимизация функции (9) сводит задачу на условный экстремум (4) к задаче на безусловный экстремум и упрощает применение метода ГА.

Применение целевой функции графа для расчета ОЗМ методом ГА

Методом перебора за 132 часа на компьютере с частотой 3,4 ГГц можно перебрать все нули целевой функции (9) для эйлера графа (рис.1). Количество ОЗМ равно 80.

При настройке ГА с параметрами 'Generations', 25, 'PopulationSize', 20, 'StallGenLimit', 15 за время 15,2 секунд можно при решении задачи (3) с функцией (9) получить 4 ОЗМ при различных значениях фактора кроссовера 0,1:0,1:0,9. График процесса сходимости ГА показывает сходимость целевой функции $Z(m) = Z(x_1, x_2, \dots, x_{12})$ в зависимости от фактора кроссовера (рис.3).

При увеличении числа особей и количества поколений в настройке ГА можно затратив несколько секунд получить сходимость при всех значениях фактора кроссовера из интервала 0,1:0,1:0,9, но при этом могут встретиться одинаковые ОЗМ. Из геометрии графа (рис.1), следует, что он обладает вертикальной осью симметрии. Это означает, что существует автоморфизм графа

$$\gamma_{авт} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Легко проверить, что композиция $\gamma_{авт} \circ \gamma_{авт} = \gamma_{авт}^2 = 1$. При этом номер начальной и конечной вершины $\gamma_{авт}(m_i)$ равен 2. Подвергнув ОЗМ из табл.1 преобразованиям $\gamma_{авт}$, $\gamma_{раз,1}$ в первой и во второй вершине с номером 1 и прочитав маршруты в обратном порядке $\gamma_{обр}$ получаем множество новых ОЗМ (табл.2).

ОЗМ из табл.2 показывают, что множество из 4 ОЗМ табл.1 с помощью преобразований $\gamma_{раз,2}$, $\gamma_{авт}$, $\gamma_{обр}$ может быть увеличена в 7 раз.

Наличие большого количества ОЗМ на графе позволяет планировать различные варианты применения БПЛА в одиночном и групповом полете между реперными точками на местности [10, 11, 12].

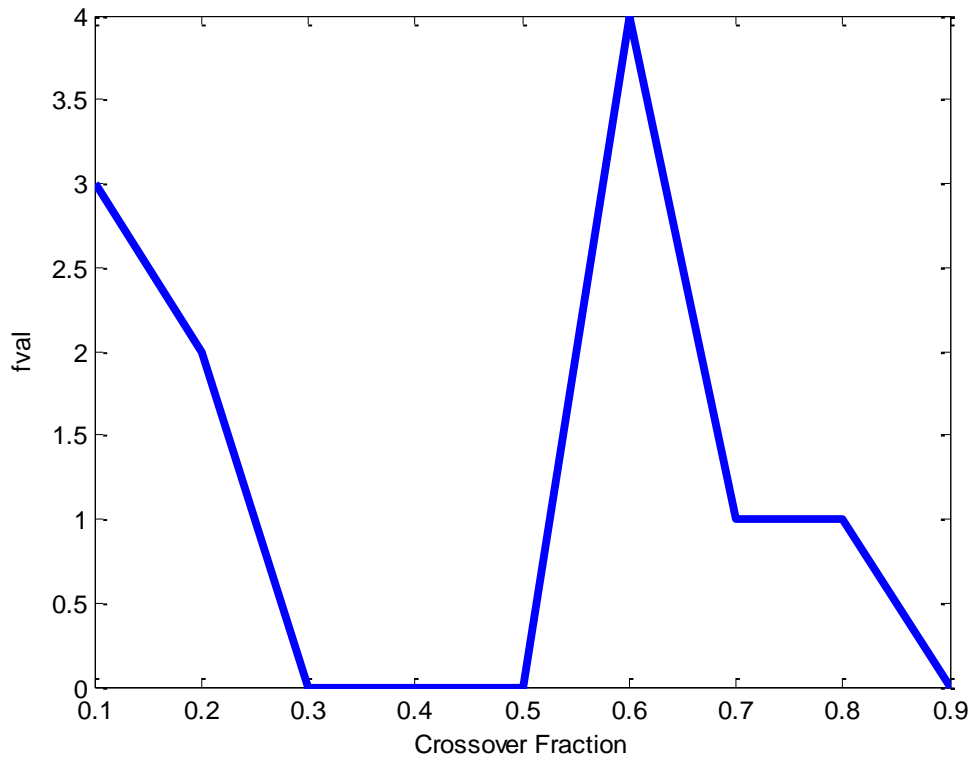


Рис.3. График сходимости целевой функции $fval = Z(m)$ в зависимости от фактора кроссовера $n = 0,1:0,1:0,9$

Результаты расчета ОЗМ приведены в табл.1.

Таблица 1

Результаты расчета ОЗМ на графе ГА

№ п/п	Кроссо-вер n	Различные ОЗМ	ОЗМ	Значение $fval = Z(m)$
1	0,3	m_1	(1, 2, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 4, 3, 7, 1)	0
2	0,4	m_2	(1, 7, 3, 4, 5, 3, 1, 2, 6, 4, 2, 1)	0
3	0,5	m_3	(1, 2, 4, 5, 3, 7, 1, 2, 6, 4, 3, 1)	0
4	0,9	m_4	(1, 2, 6, 4, 5, 3, 7, 1, 3, 4, 2, 1)	0

Таблица 2

Множество ОЗМ, полученные с помощью преобразований $\gamma_{раз,2}$, $\gamma_{авт}$ и $\gamma_{обр}$

№	ОЗМ	№	ОЗМ
1	(1, 2, 1, 3, 4, 2, 6, 4, 5, 3, 7, 1)	15	(1, 2, 6, 4, 5, 3, 1, 2, 4, 3, 7, 1)
2	(1, 2, 1, 7, 3, 5, 4, 6, 2, 4, 3, 1)	16	(1, 3, 4, 2, 1, 2, 6, 4, 5, 3, 7, 1)
3	(1, 2, 4, 3, 1, 7, 3, 5, 4, 6, 2, 1)	17	(1, 3, 4, 2, 6, 4, 5, 3, 7, 1, 2, 1)
4	(1, 2, 4, 3, 7, 1, 2, 6, 4, 5, 3, 1)	18	(1, 3, 4, 6, 2, 1, 7, 3, 5, 4, 2, 1)
5	(1, 2, 4, 5, 3, 4, 6, 2, 1, 3, 7, 1)	19	(1, 3, 5, 4, 3, 7, 1, 2, 4, 6, 2, 1)
6	(1, 2, 4, 5, 3, 7, 1, 2, 6, 4, 3, 1)	20	(1, 3, 5, 4, 3, 7, 1, 2, 6, 4, 2, 1)
7	(1, 2, 4, 6, 2, 1, 3, 5, 4, 3, 7, 1)	21	(1, 3, 5, 4, 6, 2, 1, 7, 3, 4, 2, 1)
8	(1, 2, 4, 6, 2, 1, 7, 3, 4, 5, 3, 1)	22	(1, 3, 7, 1, 2, 4, 5, 3, 4, 6, 2, 1)
9	(1, 2, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 4, 3, 7, 1)	23	(1, 3, 7, 1, 2, 6, 4, 3, 5, 4, 2, 1)
10	(1, 2, 6, 4, 2, 1, 7, 3, 4, 5, 3, 1)	24	(1, 7, 3, 1, 2, 4, 5, 3, 4, 6, 2, 1)
11	(1, 2, 6, 4, 3, 1, 2, 4, 5, 3, 7, 1)	25	(1, 7, 3, 4, 5, 3, 1, 2, 4, 6, 2, 1)
12	(1, 2, 6, 4, 3, 5, 4, 2, 1, 3, 7, 1)	26	(1, 7, 3, 4, 5, 3, 1, 2, 6, 4, 2, 1)
13	(1, 2, 6, 4, 3, 5, 4, 2, 1, 7, 3, 1)	27	(1, 7, 3, 5, 4, 2, 1, 3, 4, 6, 2, 1)
14	(1, 2, 6, 4, 5, 3, 7, 1, 3, 4, 2, 1)	28	(1, 7, 3, 5, 4, 6, 2, 1, 2, 4, 3, 1)

Задачи маршрутизации во множестве ОЗМ для планирования одиночного полета БПЛА на графе реперных точек на местности

Если реперные точки на местности, образующие граф (рис.1), ограничивают внутри контролируруемую область, то может быть поставлена задача облета ее первоначально по внутреннему периметру, а затем по внешнему. Для этих целей может подойти ОЗМ №17.

Если поставить задачу наоборот, по облету контролируемой территории по внешней границе, а затем по внутренней, то подойдет маршрут №28, который является обращением маршрута №17: $\gamma_{обр}(m_{17}) = m_{28}$.

Для чередования вариантов облета достаточно повторять ОЗМ №17 и 28.

Для облета «треугольников» с номерами вершин (1, 3, 7), (2, 6, 4) и (3, 5, 4) подойдет маршрут №24.

При действии на маршрут автоморфизма (10) БПЛА может менять маршрут в каждой вершине графа. Например, если БПЛА, двигаясь по ОЗМ №17 $m_{17} = (1, 3, 4, 2, 6, 4, 5, 3, 7, 1, 2, 1)$, находится в какой-то момент в вершине и номером 4. Тогда $\gamma_{авт}(m_{17}) = (2, 4, 3, 1, 7, 3, 5, 4, 6, 2, 1, 2) \rightarrow \gamma_{раз,1}(m_{17}) = (1, 7, 3, 5, 4, 6, 2, 1, 2, 4, 3, 1) = m_{28}$. Это означает, что с этой вершины БПЛА может продолжить полет по вершинам 4, 6, 2, 1, 2, 4, 3, 1 или по 4, 3, 1, 7, 3, 5, 4, 6, 2, 1.

При дополнительных условиях на маршрут по оптимизации, например, расхода топлива, электроэнергии от направления ветра, качества изображения от освещенности местности, надежности связи и т.д. из множества ОЗМ могут быть выбраны те варианты, которые наилучшим образом удовлетворяют поставленным требованиям.

Задачи маршрутизации во множестве ОЗМ для планирования группового полета БПЛА на графе реперных точек

Предположение о равенстве времени прохождения ребер графа позволяет планировать совместный полет нескольким БПЛА, друг за другом, с интервалом в одно ребро на графе без встречи в вершинах и на ребрах графа [13, 14, 15]. Такая тактика применения друг за другом соответствует обследованию местности группой БПЛА с различным навесным оборудованием и обеспечивает безопасность полета.

Это показывает следующая схема 1.

Схема 1

Совместный полет БПЛА по ОЗМ №4

Столбец	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1-й БПЛА	1	2	4	3	7	1	2	6	4	5	3	1	2	4	3	7	1	2	6	4
2-й БПЛА		1	2	4	3	7	1	2	6	4	5	3	1	2	4	3	7	1	2	6
3-й БПЛА			1	2	4	3	7	1	2	6	4	5	3	1	2	4	3	7	1	2
4-й БПЛА				1	2	4	3	7	1	2	6	4	5	3	1	2	4	3	7	1
5-й БПЛА					1	2	4	3	7	1	2	6	4	5	3	1	2	4	3	7
6-й БПЛА						1	2	4	3	7	1	2	6	4	5	3	1	2	4	3

Приведенная схема показывает, что при полете 4-х первых БПЛА по маршруту №4 из табл.2 друг за другом с интервалом одно ребро не происходит встреч ни в одной вершине и ни на одном ребре графа реперных точек на местности (рис.1).

Запустив 5-й БПЛА, происходит встреча в вершине с номером 3 (выделена на схеме), но на каждом ребре маршрута всегда находится только один БПЛА. При добавлении 6-го БПЛА происходит встреча в новой вершине 4 и на выделенном ребре (1, 2).

Такая тактика применения БПЛА может соответствовать наблюдению за объектами, расположенными в вершинах графа или протяженных объектов на ребрах графа, охране территории объекта.

При рассредоточенном применении группы БПЛА 28-й ОЗМ (табл.2) позволяет организовать полет 3-х БПЛА с интервалом в два ребра без встречи в вершинах и на ребрах [16,17]. Это представлено ниже на схеме 2:

Схема 2

Совместный полет БПЛА по ОЗМ с интервалом два ребра

Столбец	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1-й БПЛА ОЗМ №4	1	2	4	3	7	1	2	6	4	5	3	1	2	4	3	7	1	2	6	4
2-й БПЛА ОЗМ №4			1	2	4	3	7	1	2	6	4	5	3	1	2	4	3	7	1	2
3-й БПЛА ОЗМ №11					1	2	6	4	3	1	2	4	5	3	7	1	2	6	4	3
4-й БПЛА ОЗМ №15							1	2	6	4	5	3	1	2	4	3	7	1	2	6

Эта схема показывает, что в каждом столбце номера вершин разные и БПЛА летят на разных ребрах. Для полета 5-го БПЛА нельзя подобрать ОЗМ. Это показывает, что для совместного полета с выполнением требований не встречаться в вершинах и на ребрах максимальное число БПЛА равно 4. Для повышения безопасности полета в группе необходимо увеличить рассредоточение БПЛА. Для этого достаточно увеличить интервал между БПЛА.

На схеме 3 приведен совместный полет по ОЗМ на графе с рассредоточением БПЛА с интервалом в три ребра.

Схема 3

Совместный полет БПЛА по ОЗМ с интервалом три ребра

Столбец	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1-й БПЛА ОЗМ №4	1	2	4	3	7	1	2	6	4	5	3	1	2	4	3	7	1	2	6	4	5	3
2-й БПЛА ОЗМ №15				1	2	6	4	5	3	1	2	4	3	7	1	2	6	4	5	3	1	2
3-й БПЛА ОЗМ №15							1	2	6	4	5	3	1	2	4	3	7	1	2	6	4	5
4-й БПЛА										7	1	3	4	3	7	1	2	6	4	5	3	1

Подобрать для 4-го БПЛА ОЗМ не удастся, так как его маршрут содержит кратное ребро (1,2), но он не встречается с другими БПЛА ни в одной вершине и ни на одном ребре. При нахождении большего количества ОЗМ возникает больше возможностей для планирования вариантов группового полета.

При применении к схеме полета группы БПЛА автоморфизма (10) происходит перестановка номеров вершин в каждом столбце схем. Это приводит к возможности изменения маршрута полета всей группы БПЛА в любой момент нахождения в вершинах каждого столбца схемы, например, в 10-м столбце схемы 3. Это приведено на схеме 4.

Схема 4

Совместный полет БПЛА по ОЗМ с изменением маршрутов и интервалом три ребра

Столбец	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1-й БПЛА ОЗМ №4	1	2	4	3	7	1	2	6	4	5	4	2	1	3	4	6	2	1	7	3	5	4
2-й БПЛА ОЗМ №15				1	2	6	4	5	3	1	1	3	4	6	2	1	7	3	5	4	2	1
3-й БПЛА ОЗМ №15							1	2	6	4	3	4	2	1	3	4	6	2	1	7	3	5
Столбец	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
4-й БПЛА										7	7	1	3	4	5	3	4	6	4	2	1	3

Схема 4 показывает, что при нахождении БПЛА одновременно в 10-м столбце маршруты после применения автоморфизма (10) к ОЗМ №4, 15 поменялись, согласно стрелок: 1-й БПЛА совершает полет по маршруту 3-й строки; 2-й БПЛА полетит по маршруту №18; 3-й БПЛА полетит по маршруту 1-й строки. При действии автоморфизма $\gamma_{авт}$ на маршрут №4 из табл.2 имеем $\gamma_{авт}(m_4) = (2, 1, 3, 4, 6, 2, 1, 7, 3, 5, 4, 2) \rightarrow \gamma_{раз,1}(2, 1, 3, 4, 6, 2, 1, 7, 3, 5, 4, 2) = (1, 3, 4, 6, 2, 1, 7, 3, 5, 4, 2, 1)$

= m_{18} . Аналогично m_{15} при действии $\gamma_{авт}$ переходит в m_{27} . Для 4-го БПЛА, чтобы он не встречался с другими БПЛА в вершинах и на ребрах, маршрут приходится подбирать из оставшихся номеров вершин.

Если геометрия графа допускает несколько автоморфизмов, то вариантов изменения маршрутов в схемах совместного полета будет больше.

Выводы:

1. Множество ОЗМ позволяет планировать различные варианты применения БПЛА в одиночном и групповом полете по графам реперных точек на местности;
2. Алгоритм построения целевой функции является универсальным в классе неориентированных графов, так как всегда позволяет различным графам поставить в соответствие различные целевые функции $Z(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ из класса многочленов от нескольких переменных;
3. Целевая функция $Z(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ имеет простой программный код, так как является неотрицательным многочленом от нескольких переменных. Код программы минимизации целевой функции методом ГА состоит в поиске нулей многочлена, которые совпадают с минимизирующими наборами из номеров вершин графа, образующих ОЗМ;
4. Целевая функция $Z(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ представляет собой сумму трех слагаемых (9). Первое слагаемое $Z_1(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ является суммой композиций *inter1*of двух функций одного переменного *inter1* и функции двух переменных $f(x, y)$ и несет основную информацию о ребрах и петлях графа принадлежащих графу или нет. Вид функции $Z_1(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ зависит от геометрии графа;
5. Второе слагаемое в форме многочлена $Z_2(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ от нескольких переменных второго порядка описывает выбранный вариант модели эйлерова графа (МЭГ). Если граф не является эйлеровым, то его можно несколькими способами перевести в МЭГ, добавляя кратные ребра. При этом каждой МЭГ будет соответствовать различные функции $Z_2(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$;
6. Для выбранной МЭГ протяженность всех ОЗМ, например, в километрах, будет одинакова, так как количество пройденных ребер будет одно и то же. Если граф допускает несколько МЭГ, то протяженность ОЗМ для разных МЭГ будет разной. Это следует из способа построения МЭГ путем добавления кратных ребер;
7. Третье слагаемое $Z_3(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ зависит от номеров вершин графа и может представлять собой любую симметрическую функцию нескольких переменных, например, многочлены сумм k -х степеней переменных (7).
8. Метод ГА позволяет получить ограниченное число ОЗМ, которое можно увеличить в несколько раз за счет прочтения замкнутого маршрута в обратной последовательности (преобразование $\gamma_{обр}$), разрезания маршрута в промежуточной точке на два фрагмента и сшивание их в конечных точках (преобразование $\gamma_{раз}$), применения группы изоморфизмов графа $\{\gamma_{авт}\}$ (10);
9. Имея множество ОЗМ (запланированных маршрутов), отвечающих разным МЭГ, можно выбрать маршруты для решения различных многокритериальных задач;
10. Для сокращения объема вычислений и времени расчета необходимо не только построить целевую функцию с простым программным кодом, но и адаптировать ГА к решению конкретной задачи расчета ОЗМ для чего необходимо писать собственные (пользовательские) программы операций кроссовера, мутации, отбора особей. Это позволит проводить расчеты в реальном времени на борту БПЛА и приспособить управление к меняющимся условиям внешней обстановки [18,19,20].

На основании всего сказанного можно отметить, что алгоритм построения целевых функций и генетический алгоритм могут быть использованы в программных алгоритмах планирования оптимальных маршрутов по реперным точкам на местности в одиночном и групповом полете БПЛА для повышения автономности и автоматизации процессов управления.

Литература

1. Аллилуева Н.В., Руденко Э.М. Методика решения оптимизационных задач по выбору замкнутых маршрутов на графах на основе генетического алгоритма // Известия института инженерной физики. 2017. №2 (44). С. 63-69.
2. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И., Эвнин А.Ю. Вся высшая математика. Т.7. М.: КомКнига, 2006, 208 с.

3. Аллилуева Н.В., Дараган А.Д., Ефремов А.А., Руденко Э.М. Математические аспекты применения генетического алгоритма к решению задачи оптимизации на графах // Труды Московского института теплотехники. 2017. Т. 17. Ч. 1. С. 108-117.
4. Дьяконов В.П., Круглов В.В. Инструменты биоинформатики и искусственного интеллекта. MATLAB 6.5 SP1/7/7 SP1/7 SP2 + Simulink 5/6. М.: Солон-Пресс, 2005, 800 с.
5. Гладков Л. А., Курейчик В. В., Курейчик В. М. Генетические алгоритмы. Изд 2-е. М.:Физматлит, 2006. 320 с.
6. Васильев А.Н. Matlab. Самоучитель. Практический подход. Изд. 2-е. СПб.: Наука и Техника, 2015. 448 с.
7. Аллилуева Н.В., Дараган А.Д., Ефремов А.А., Руденко Э.М. Математические методы маршрутизации беспилотных летательных аппаратов в групповом полете по графу реперных точек на местности // Труды XXXVI Всероссийской научно-технической конференции. Серпухов: Изд-во ФВА РВСН им. Петра Великого, 2017. Ч. 6. С.12-16.
8. Кристофидес Н. Теория графов. М.: Мир, 1978.
9. Нечетуренко М.И., Попков В.К., Майнагашиев С.М., Кауль С.Б., Проскураков В.А., Кохов В.А., Грызунов А.Б. Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях. Новосибирск: Наука, 1990. 515 с.
10. Austin R. Unmanned aircraft systems: UAVs design, development and deployment. John Wiley & Sons Ltd, 2010.
11. Unmanned Aircraft Systems (UAS): Commercial Outlook for a New Industry. Bill Canis Specialist in Industrial Organization and Business. September 9, 2015.
12. Unmanned Aircraft System (UAS). Service Demand 2015 2035. Literature Review & Projections of Future Usage, 2015.
13. Городецкий В.И., Карсаев О.В., Самойлов В.В., Серебряков С.В. Прикладные многоагентные системы группового управления // Искусственный интеллект и принятие решений. 2009. № 2. С.3-24.
14. Kothari M., Postlethwaite I., Gu D. Multi-UAV path planning in obstacle rich environments using rapidly-exploring random trees // Proc. Of the combined 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference (Shanghai, December 16-18, 2009). Shanghai, 2009. Pp. 3069–3074.
15. McHenry R. ACTUV ASW Continuous Trail Unmanned Vessel Industry Day. USA, DARPA, 2010.
16. Rohde S. Link quality dependent mobility strategies for distributed aerial sensor networks // GLOBECOM Workshops (GC Wkshps). 2010. Pp. 1783–1787.
17. Sahingoz O. K. Networking Models in Flying Ad-Hoc Networks (FANETs): Concepts and Challenges // J. Intell. Robot. Syst. 2014. Vol. 74. № 1–2. Pp. 513–527.
18. Zadeh S. M., Powers D., Sammut K. Optimal Route Planning with Prioritized Task Scheduling for AUV Missions Article // Centre for Maritime Engineering, Control and Imaging Flinders University. Adelaide, SA 5042, Australia, 2016. Pp.1–8. URL: <https://www.researchgate.net/publication/301816813>. pdf
19. He P., Dai S. Stealth Real-time Paths Planning for Heterogeneous UAV Formation Based on Parallel Niche Genetic Algorithm. Journal of Computational Information Systems. 2014. Pp. 6731–6740.
20. Wang F., Man Y., Man L. Intelligent Optimization Approach for the k Shortest Paths Problem Based on Genetic Algorithm // 10th International Conference on Natural Computation, 2014.

THE ROUTING PROBLEM OF UNMANNED AERIAL VEHICLES IN A GRAPH OF REFERENCE POINTS, THE OBJECTIVE FUNCTION OF THE GRAPH AND GENETIC ALGORITHM

Natalia V. Alliluyeva,
Saint Petersburg, Russia,
alliluyeva_nv@radar-mms.com

Eduard M. Rudenko,
Serpuukhov, Russia,
eduard5529@yandex.ru

ABSTRACT

The work deals with the calculation of the unmanned aerial vehicles (UAV) routes on the graph of reference points on the ground. The mathematical model is based on the creation of the objective function of several variables, set on the edges and on the vertices of a mathematical graph. The argument of the objective function that minimizes its value represents the sequence number of the reference points of the optimal closed route passing through all edges of the graph. The article is focused on the relationship of the applied routing problem of UAVs on the ground with a mathematical problem of optimization on graphs by means of genetic algorithm.

Keywords: mathematical graph; reference points on the ground; the optimal closed routes; the automorphisms of a graph; the objective function; genetic algorithm.

References

1. Allilueva N.V., Rudenko H.M. The method of solving optimization problems for the selection of closed routes on graphs based on a genetic algorithm // *Izvestiya instituta inzhenernoj fiziki*. 2017. Pp. 63-69.
2. Krasnov M.L., Kiselev A.I., Makarenko G.I., SHikin E.V., Zalyapin V.I., EHvnin A.YU. *Vsya vysshaya matematika* [All higher mathematics] Vol.7. Moscow: KomKniga, 2006. (In Russian)
3. Allilueva N.V., Daragan A.D., Efremov A.A., Rudenko E.H.M. Matematicheskie aspekty primeneniya geneticheskogo algoritma k resheniyu zadachi optimizacii na grafah // *Trudy Moskovskogo instituta teplotekhniki*. 2017. Vol.17. Pt. 1. Pp. 108-117. (In Russian)
4. D'yakonov V.P., Kruglov V.V. *Instrumenty bioinformatiki i iskusstvennogo intellekta. MATLAB 6.5 SP1/7/7 SP1/7 SP2 + Simulink 5/6* [Tooling bioinformatics and artificial intelligence]. Moscow: Solon-Press, 2005. (In Russian)
5. Gladkov L. A., Kurejchik V. V., Kurejchik V. M. *Geneticheskie algoritmy* [Genetic algorithm]. Moscow: Fizmatlit, 2006. 320 p. (In Russian)
6. Vasil'ev A.N. *Matlab. Samouchitel'. Prakticheskij podhod* [Self-instruction. Practical approach.]. Saint-Petersburg: Nauka i Tekhnika, 2015. 448 p. (In Russian)
7. Allilueva N.V., Daragan A.D., Efremov A.A., Rudenko E.M. Matematicheskie metody marshrutizacii bespilotnyh letatel'nyh apparatov v gruppovom polete po grafu repemyh toчек na mestnosti [Mathematical methods of routing unmanned aerial vehicles in group flight on the graph of reference points on the ground]. *Trudy XXXVI Vserossijskoj nauchno-tehnicheskoy konferencii* [Proceedings of the XXXVI all-Russian scientific and technical conference]. Serpuhov: FVA RVSN im. Petra Velikogo, 2017. Pt. 6. Pp. 12–16. (In Russian)
8. Kristofides N. *Teoriya grafov* [Graph theory]. Moscow: Mir, 1978. (In Russian)
9. Nechepurenko M.I., Popkov V.K., Majnagashv S.M., Kaul' S.B., Proskuryakov V.A., Kohov V.A., Gryzunov A.B. *Algoritmy i programmy resheniya zadach na grafah i setyah* [Algorithms and programs for solving problems on graphs and networks]. Novosibirsk: Nauka, 1990. 515 p. (In Russian)
10. Austin, Reg. Unmanned aircraft systems: UAVS design, development and deployment. John Wiley & Sons Ltd, 2010.
11. Unmanned Aircraft Systems (UAS): Commercial Outlook for a New Industry. Bill Canis Specialist in Industrial Organization and Business. 2015.
12. Unmanned Aircraft System (UAS). Service Demand 2015 2035. Literature Review & Projections of Future Usage, 2015.
13. Gorodeckij V.I., Karsaev O.V., Samojlov V.V., Serebryakov S.V. Prikladnye mnogoagentnye sistemy gruppovogo upravleniya. *Iskusstvennyj intellekt i prinyatie reshenij*. 2009. No 2. Pp. 3-24. (In Russian)
14. Kothari M., Postlethwaite I., Gu D., Multi-UAV path planning in obstacle rich environments using rapidly-exploring random trees // Proc. Of the combined 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, December 16-18, 2009, Shanghai, P.R. China, Pp. 3069–3074.
15. McHenry R. ACTUV ASW Continuous Trail Unmanned Vessel Industry Day. USA, DARPA, 2010.
16. Rohde S. Link quality dependent mobility strategies for distributed aerial sensor networks // *GLOBECOM Workshops (GC Wkshps)*, 2010 IEEE. Pp. 1783–1787.
17. Sahingoz O. K. Networking Models in Flying Ad-Hoc Networks (FANETs): Concepts and Challenges // *J. Intell. Robot. Syst.* 2014. Vol. 74, No 1–2. Pp. 513–527. (In Russian)
18. Zadeh S. M., Powers D., Sammut K. Optimal Route Planning with Prioritized Task Scheduling for AUV Missions Article. Centre for Maritime Engineering, Control and Imaging Flinders University, Adelaide, SA 5042, Australia, 2016. Pp. 1–8. URL: <https://www.researchgate.net/publication/301816813>. pdf
19. He P., Dai S. “Stealth Real-time Paths Planning for Heterogeneous UAV Formation Based on Parallel Niche Genetic Algorithm”. *Journal of Computational Information Systems*, 2014. Pp. 6731–6740, . (In Russian)
20. Wang F., Man Y., Man L., “Intelligent Optimization Approach for the k Shortest Paths Problem Based on Genetic Algorithm”, 10th International Conference on Natural Computation, 2014.

Information about author(s):

Alliluyeva N.V., leading specialist of Joint stock company “Scientific-production enterprise “Radar mms”, Saint Petersburg.

Rudenko E. M., Ph. D., associate professor of the Chair of Mathematics of Peter the Great Strategic Missile Academy (Serpukhov Branch).

For citation: Alliluyeva N.V., Rudenko E.M. The routing problem of unmanned aerial vehicles in a graph of reference points. *I-methods*. 2018. Vol. 10. No.1. Pp. 05-18. (In Russian)