

Определение маршрута максимального мониторинга на графе реперов на местности

Руденко Эдуард Михайлович

к.т.н., доцент филиала Военной академии Ракетных войск стратегического назначения им. Петра Великого, г. Серпухов, Russia, eduard5529@yandex.ru

Семикина Елена Викторовна

преподаватель филиала Военной академии Ракетных войск стратегического назначения им. Петра Великого, г. Серпухов, Россия, labinfo_serp@inbox.ru

АННОТАЦИЯ

Введение: в работе рассматривается математический подход к определению на эйлеровом графе маршрутов максимального мониторинга, на которых возможен полет наибольшего количества БПЛА, безопасно двигающихся в группе с интервалом в одно или несколько ребер графа таким образом, чтобы исключить возможность одновременного нахождения в одинаковых вершинах или на ребрах двух и более аппаратов. Определение таких маршрутов имеет важное практическое значение для обеспечения наиболее плотного и непрерывного мониторинга на местности, где расположены реперы. **Постановка задачи** из множества эйлеровых маршрутов на эйлеровом графе найти маршруты максимального мониторинга. Проблема нахождения маршрутов максимального мониторинга состоит в том, что точное множество всех эйлеровых маршрутов можно подсчитать только методом перебора, которое на графах с большим числом ребер и вершин не удается подсчитать за приемлемое время — часы, дни, недели. Поэтому приходится выбирать не из полного множества замкнутых маршрутов, а из множества рассчитанных с помощью генетического алгоритма, как решение оптимизационной задачи для целевой функции и, поэтому замкнутые маршруты можно назвать оптимальными замкнутыми маршрутами (ОЗМ). **Методы:** определение маршрута максимального мониторинга из множества эйлеровых маршрутов проводится с помощью программы проверки каждого из них на определение числа БПЛА, совершающих групповой полет по этому маршруту друг за другом с интервалом одно ребро с соблюдением условий безопасности. Таким образом, найденные маршруты максимального мониторинга зависят от исходного набора оптимальных замкнутых маршрутов и могут не совпадать с маршрутами, которые отбираются из полного множества всех эйлеровых маршрутов, которые можно назвать маршрутами наибольшего мониторинга. **Результаты:** полученное ограниченное число эйлеровых маршрутов, маршрутов максимального мониторинга и маршрутов наибольшего мониторинга может быть увеличено в несколько раз с помощью операторов обращения (инверсии), разрезания в промежуточных вершинах и автоморфизмов, если граф обладает горизонтальной, вертикальной, диагональной симметрией, и тем самым получить возможность оперировать большим многообразием вариантов группового полета на графе реперов. При этом число группы БПЛА на маршрутах максимального мониторинга и маршрутах наибольшего мониторинга не меняется и является инвариантом. **Практическая значимость:** множество маршрутов максимального мониторинга и маршрутов наибольшего мониторинга могут быть использованы в алгоритмах полета группы БПЛА для организации плотного и непрерывного мониторинга по реперам на местности с соблюдением условий безопасного полета с интервалом в одно и более ребер друг за другом. Операторы обращения, разрезания в промежуточной точке и автоморфизмы графа, применяемые к маршрутам максимального мониторинга и к маршрутам наибольшего мониторинга, позволяют менять маршруты движения одновременно для всей группировки БПЛА непредсказуемо для внешних наблюдателей и реализовать различные схемы совместных действий на графе реперных точек на местности с соблюдением условий безопасности полета.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: эйлеровы графы реперных точек; оптимальные замкнутые маршруты; маршрут максимального и наибольшего мониторинга; БПЛА; целевая функция; генетический алгоритм.

Введение

Одной из важных проблем, которую приходится решать в задаче маршрутизации беспилотных летательных аппаратов на множестве ориентиров местности, между которыми планируется полет, является организация их группового применения.

Ориентиры местности или реперы, соединенные между собой, образуют граф, поэтому задача маршрутизации может быть формализована в оптимизационную задачу на математическом графе. Если маршрут на графе является замкнутым, задача маршрутизации решается во множестве эйлеровых маршрутов на эйлеровом графе, на котором существует конечное число таких маршрутов. Каждый эйлеров маршрут проходит один раз по всем ребрам графа, имеет одинаковую длину, так как содержит все его ребра, следовательно отличается от других маршрутов только порядком следования ребер графа. В такой постановке задача нахождения маршрутов на графе реперов заключается не в определении минимального значения целевой функции, т.к. оно равно нулю и одинаково на всех оптимальных замкнутых маршрутах (ОЗМ), а в определении ее аргументов, которые являются множеством ОЗМ: $M = \{m\}$, и может быть решена одним из методов теории оптимизации, например, с помощью генетического алгоритма (ГА) [1].

При организации облета территории и с целью осуществления непрерывного контроля, необходимо обеспечить плотный мониторинг группой БПЛА из максимально большого количества аппаратов с соблюдением безопасных условий полета: не встречаться более двух в одном репере-вершине и на одном ребре не лететь вместе или навстречу друг другу. Такой мониторинг может быть осуществлен на одном и том же ОЗМ с интервалом в одно или несколько ребер друг за другом [2].

Процесс поиска таких уникальных маршрутов осуществлялся в два этапа: сначала генетическим алгоритмом было насчитано некоторое количество ОЗМ на выбранном графе, затем с помощью разработанной программы определения количества аппаратов (*count*), движущихся одновременно по заданному ОЗМ с соблюдением условий безопасного полета, были отобраны маршруты с наибольшим составом группы. Следует отметить, что вследствие того, что задача поиска оптимальных замкнутых маршрутов на графе относится к области целочисленной комбинаторной оптимизации. Значение *count* может быть постоянным и точным только на графах малой размерности, на которых возможно найти все ОЗМ методом перебора. Если на графе методом перебора нельзя рассчитать все ОЗМ из-за больших затрат машинного времени, то приходится выбирать из множества маршрутов, которые можно рассчитать с помощью ГА. Для таких графов максимальное количество аппаратов в группе будет зависеть от имеющегося в распоряжении множества ОЗМ.

Требование группового полета БПЛА с соблюдением условия безопасности может быть выполнено, если обеспечить выполнение равенства времени полета каждого БПЛА на любом из ребер графа. Так как протяженности ребер могут быть разными, то на ребрах большей протяженности БПЛА должен двигаться с большей скоростью, а на более коротких ребрах — с меньшей. Предполагается, что все БПЛА достигнут своих вершин графа в ходе следования по маршруту приблизительно в один и тот же момент времени.

Приведем примеры расчета маршрутов максимального мониторинга на различных эйлеровых графах [3, 4], у которых вершины имеют четную кратность. Это означает, что в каждую вершину должно сходиться четное число ребер.

Примеры нахождения маршрутов максимального мониторинга

1. Рассмотрим граф **v6e10**, показанный на рис. 1. Он является эйлеровым и на нем ребра (1, 2) и (5, 4) являются кратными.

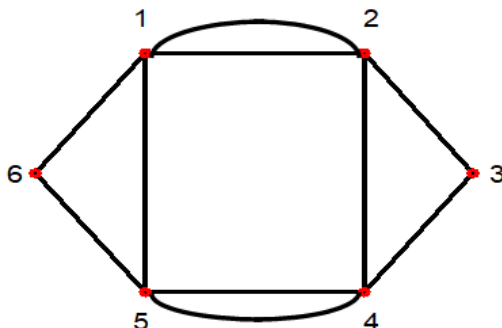


Рис. 1. Граф **v6e10**, состоящий из 6 вершин и 10 ребер

На графе **v6e10** методом перебора на компьютере с частотой 3,4 ГГц за время 1244 секунд можно рассчитать все 40 ОЗМ, которые представлены в таблице 1.

Таб. 1 Результаты расчета ОЗМ на графе **v6e10** методом перебора

ОЗМ	
$m_1 = (1\ 2\ 1\ 5\ 4\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 1)$	$m_{21} = (1\ 5\ 4\ 2\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 1)$
$m_2 = (1\ 2\ 1\ 5\ 4\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6\ 1)$	$m_{22} = (1\ 5\ 4\ 2\ 1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1)$
$m_3 = (1\ 2\ 1\ 6\ 5\ 4\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1)$	$m_{23} = (1\ 5\ 4\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 1\ 2\ 1)$
$m_4 = (1\ 2\ 1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 4\ 5\ 1)$	$m_{24} = (1\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 1)$
$m_5 = (1\ 2\ 3\ 4\ 2\ 1\ 5\ 4\ 5\ 6\ 1)$	$m_{25} = (1\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 6\ 5\ 4\ 2\ 1)$
$m_6 = (1\ 2\ 3\ 4\ 2\ 1\ 6\ 5\ 4\ 5\ 1)$	$m_{26} = (1\ 5\ 4\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6\ 1\ 2\ 1)$
$m_7 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 1)$	$m_{27} = (1\ 5\ 4\ 5\ 6\ 1\ 2\ 3\ 4\ 2\ 1)$
$m_8 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 6\ 5\ 4\ 2\ 1)$	$m_{28} = (1\ 5\ 4\ 5\ 6\ 1\ 2\ 4\ 3\ 2\ 1)$
$m_9 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 2\ 1\ 5\ 6\ 1)$	$m_{29} = (1\ 5\ 6\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 2\ 1)$
$m_{10} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 2\ 1\ 6\ 5\ 1)$	$m_{30} = (1\ 5\ 6\ 1\ 2\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1)$
$m_{11} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 1\ 2\ 4\ 5\ 1)$	$m_{31} = (1\ 6\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 2\ 1)$
$m_{12} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 1\ 5\ 4\ 2\ 1)$	$m_{32} = (1\ 6\ 5\ 1\ 2\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1)$
$m_{13} = (1\ 2\ 4\ 3\ 2\ 1\ 5\ 4\ 5\ 6\ 1)$	$m_{33} = (1\ 6\ 5\ 4\ 2\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1)$
$m_{14} = (1\ 2\ 4\ 3\ 2\ 1\ 6\ 5\ 4\ 5\ 1)$	$m_{34} = (1\ 6\ 5\ 4\ 2\ 1\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1)$
$m_{15} = (1\ 2\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 1)$	$m_{35} = (1\ 6\ 5\ 4\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 1)$
$m_{16} = (1\ 2\ 4\ 5\ 1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1)$	$m_{36} = (1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 2\ 4\ 5\ 1)$
$m_{17} = (1\ 2\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 5\ 6\ 1)$	$m_{37} = (1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 5\ 4\ 2\ 1)$
$m_{18} = (1\ 2\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 6\ 5\ 1)$	$m_{38} = (1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 4\ 5\ 1\ 2\ 1)$
$m_{19} = (1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1)$	$m_{39} = (1\ 6\ 5\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 2\ 1)$
$m_{20} = (1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 1\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1)$	$m_{40} = (1\ 6\ 5\ 4\ 5\ 1\ 2\ 4\ 3\ 2\ 1)$

Введем понятия маршрутов наибольшего и максимального мониторинга.

Маршрут наибольшего мониторинга (МНМ) — это такой маршрут \mathbf{m} из всех *существующих* на графе G оптимальных замкнутых маршрутов, по которому могут одновременно перемещаться *наибольшее число* аппаратов в группе. Сложность определения МНМ связана с отсутствием полиномиальных алгоритмов поиска ОЗМ для графов средней и большой размерности.

Число маршрута наибольшего мониторинга (k) — наибольшее число БПЛА в группе выбираемое из множества всех существующих ОЗМ графа G .

Маршрут максимального мониторинга (МММ) — это такой маршрут \mathbf{m} из *подмножества* всех ОЗМ на графе G , полученных одним из методов, например, генетическим алгоритмом, оптимальных замкнутых маршрутов, по которому могут одновременно перемещаться *максимальное число* аппаратов в группе с выполнением требований безопасного полета.

Число маршрута максимального мониторинга — максимальное число БПЛА в группе двигающихся друг за другом с интервалом одно ребро с соблюдением условий безопасности. Это число зависит от множества ОЗМ, но всегда является максимальным для данного множества ОЗМ графа G .

Для графа **v6e10**, на котором рассчитаны все 40 ОЗМ (таблица 1), маршруты наибольшего мониторинга (МНМ) имеют номера: 7, 11, 15, 19, 22, 25, 34, 37, отмеченные полужирным начертанием в таблице 1. Все они обеспечивают полет четырех БПЛА с интервалом в одно ребро с соблюдением условий безопасного полета. В таблице 2 показано движение группы для ОЗМ $\mathbf{m}_7 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 1)$ с дистанцией в одно ребро.

Таб. 2 Полет четырех БПЛА с интервалом в одно ребро по ОЗМ №7 на графе **v6e10**

№ столбца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1ЛА №1	1	2	3	4	5	1	2	4	5	6	1	2	3	4	5	1
2ЛА №2		1	2	3	4	5	1	2	4	5	6	1	2	3	4	5
3ЛА №3			1	2	3	4	5	1	2	4	5	6	1	2	3	4
4ЛА №4				1	2	3	4	5	1	2	4	5	6	1	2	3
5ЛА №5					1	2	3	4	5	1	2	4	5	6	1	2

В таблице 2 выделены полужирным начертанием вершины 4 и 5, в которых пятый БПЛА встретится с первым (столбцы 8, 9) и будет нарушена безопасность полета, т.е. $count = 4$.

Над множеством ОЗМ из таблицы 1 можно провести преобразование обращения $\gamma_{обр}$ ОЗМ. Например, для ОЗМ №7 из таблицы 1 имеем:

$$\gamma_{обр}(\mathbf{m}_7) = \gamma_{обр}(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 1) = (1\ 6\ 5\ 4\ 2\ 1\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1) = \mathbf{m}_{34}. \tag{1}$$

Преобразование $\gamma_{обр}$ переставляет ОЗМ из таблицы 1 и переводит МНМ друг в друга.

Граф **v6e10** имеет вертикальную и горизонтальную симметрию и поэтому имеет вертикальный и горизонтальный автоморфизмы

$$\gamma_{\text{авт.гор}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\gamma_{\text{авт.вер.}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\gamma_{\text{авт.гор}}(\mathbf{m}_7) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 1) = (5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 5\ 4\ 2\ 1\ 6\ 5)$.

Полученный маршрут $\gamma_{\text{авт.гор}}(\mathbf{m}_7)$ можно превратить в маршрут \mathbf{m}_{22} из таблицы 1 с помощью преобразования разрезания в промежуточной вершине 1 — $\gamma_{\text{раз,1}}$. Применим преобразование $\gamma_{\text{раз,1}}$ к маршруту $(5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 5\ 4\ 2\ 1\ 6\ 5)$:

$$\begin{aligned} &\gamma_{\text{раз,1}}(5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 5\ 4\ 2\ 1\ 6\ 5) \rightarrow (5\ 4\ 3\ 2\ 1)(1\ 5\ 4\ 2\ 1\ 6\ 5) \rightarrow \\ &\rightarrow (1\ 5\ 4\ 2\ 1\ 6\ 5)(5\ 4\ 3\ 2\ 1) = (1\ 5\ 4\ 2\ 1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1) = \mathbf{m}_{22}. \end{aligned} \tag{3}$$

Поэтому можно считать, что $\gamma_{\text{авт.гор}}(\mathbf{m}_7) = \mathbf{m}_{22}$. Следовательно, преобразования автоморфизмов $\gamma_{\text{авт.гор}}$ и $\gamma_{\text{авт.вер}}$ переставляет ОЗМ таблицы 1 и переводят МНМ в маршруты наибольшего мониторинга.

Оператор разрезания $\gamma_{\text{раз,1}}$, примененный к МНМ \mathbf{m}_7 дает снова МНМ:

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{раз,1}}(\mathbf{m}_7) &= \gamma_{\text{раз,1}}(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 1) \rightarrow (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1)(1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 1) \rightarrow \\ &\rightarrow (1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 1)(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1) = (1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1) = \mathbf{m}_{19}. \end{aligned}$$

Таким образом, после преобразования маршрутов с помощью операторов $\gamma_{\text{обр}}$, $\gamma_{\text{раз,1}}$, $\gamma_{\text{авт.гор}}$ и $\gamma_{\text{авт.вер}}$, маршруты наибольшего мониторинга переводятся в МНМ, при этом получают другие оптимальные замкнутые маршруты из таблицы 1.

Для данного графа в процентном отношении доля МНМ составляет $8/40 = 0,2 = 20\%$. Для графов с большим числом вершин и ребер этот процент может меняться от малых до больших значений.

Отметим, что операторы горизонтального и вертикального автоморфизмов актуальны для графов средней и большой размерности, на которых невозможно определить абсолютно все оптимальные замкнутые маршруты, т.к. они:

- позволяют увеличить разнообразие используемых группой маршрутов;
- обеспечивают возможность перестраивать маршруты с одного на другой в ходе движения;
- делают групповой полет непредсказуемым для внешнего наблюдателя;
- позволяют изменять маршруты для всей группировки одновременно, изменяя частоту прохождения одних ребер увеличивая, а других уменьшая;
- усиливают непрерывный мониторинг в заданной области расположения реперных точек на местности.

При этом, количество БПЛА в группе на маршрутах, полученных таким способом, не изменится. Это подтверждает проверка, проведенная на множестве ОЗМ из таблицы 1.

2. Рассмотрим граф **v8e12**, представленный на рис. 2. Он является эйлеровым и на нем нет кратных ребер.

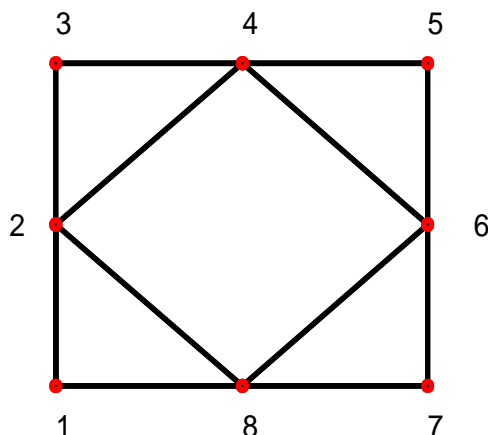


Рис. 2. Граф $v8e12$, состоящий из 8 вершин и 12 ребер

На графе $v8e12$ методом перебора на компьютере с частотой 3,4 ГГц за время 429873 секунд можно рассчитать все 80 ОЗМ, которые представлены в таблице 3.

Таб. 3. Результаты расчета ОЗМ на графе $v8e12$ методом перебора

	ОЗМ			
1	$m_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 2\ 8\ 6\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 1)$	41	$m_{41} = (1\ 8\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 6\ 4\ 2\ 1)$	
2	$m_2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 2\ 8\ 6\ 5\ 4\ 6\ 7\ 8\ 1)$	42	$m_{42} = (1\ 8\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8\ 7\ 6\ 4\ 2\ 1)$	
3	$m_3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 2\ 8\ 7\ 6\ 4\ 5\ 6\ 8\ 1)$	43	$m_{43} = (1\ 8\ 2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 6\ 5\ 4\ 2\ 1)$	
4	$m_4 = (1\ 2\ 3\ 4\ 2\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 6\ 8\ 1)$	44	$m_{44} = (1\ 8\ 2\ 3\ 4\ 6\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 2\ 1)$	
5	$m_5 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 4\ 2\ 8\ 6\ 7\ 8\ 1)$	45	$m_{45} = (1\ 8\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 6\ 4\ 3\ 2\ 1)$	
6	$m_6 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 4\ 2\ 8\ 7\ 6\ 8\ 1)$	46	$m_{46} = (1\ 8\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 7\ 6\ 4\ 3\ 2\ 1)$	
7	$m_7 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 2\ 4\ 6\ 8\ 1)$	47	$m_{47} = (1\ 8\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 7\ 6\ 4\ 3\ 2\ 1)$	
8	$m_8 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 6\ 4\ 2\ 8\ 1)$	48	$m_{48} = (1\ 8\ 2\ 4\ 6\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1)$	
9	$m_9 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8\ 2\ 4\ 6\ 7\ 8\ 1)$	49	$m_{49} = (1\ 8\ 6\ 4\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 2\ 1)$	
10	$m_{10} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8\ 7\ 6\ 4\ 2\ 8\ 1)$	50	$m_{50} = (1\ 8\ 6\ 4\ 2\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1)$	
11	$m_{11} = (1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 5\ 4\ 2\ 8\ 6\ 7\ 8\ 1)$	51	$m_{51} = (1\ 8\ 6\ 4\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 2\ 1)$	
12	$m_{12} = (1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 5\ 4\ 2\ 8\ 7\ 6\ 8\ 1)$	52	$m_{52} = (1\ 8\ 6\ 4\ 3\ 2\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 2\ 1)$	
13	$m_{13} = (1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 1)$	53	$m_{53} = (1\ 8\ 6\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 2\ 3\ 4\ 2\ 1)$	
14	$m_{14} = (1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 6\ 5\ 4\ 2\ 8\ 1)$	54	$m_{54} = (1\ 8\ 6\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 2\ 4\ 3\ 2\ 1)$	
15	$m_{15} = (1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 8\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 1)$	55	$m_{55} = (1\ 8\ 6\ 5\ 4\ 2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 2\ 1)$	
16	$m_{16} = (1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 2\ 8\ 1)$	56	$m_{56} = (1\ 8\ 6\ 5\ 4\ 2\ 8\ 7\ 6\ 4\ 3\ 2\ 1)$	
17	$m_{17} = (1\ 2\ 4\ 3\ 2\ 8\ 6\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 1)$	57	$m_{57} = (1\ 8\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 4\ 6\ 7\ 8\ 2\ 1)$	
18	$m_{18} = (1\ 2\ 4\ 3\ 2\ 8\ 6\ 5\ 4\ 6\ 7\ 8\ 1)$	58	$m_{58} = (1\ 8\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 8\ 7\ 6\ 4\ 2\ 1)$	
19	$m_{19} = (1\ 2\ 4\ 3\ 2\ 8\ 7\ 6\ 4\ 5\ 6\ 8\ 1)$	59	$m_{59} = (1\ 8\ 6\ 5\ 4\ 6\ 7\ 8\ 2\ 3\ 4\ 2\ 1)$	
20	$m_{20} = (1\ 2\ 4\ 3\ 2\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 6\ 8\ 1)$	60	$m_{60} = (1\ 8\ 6\ 5\ 4\ 6\ 7\ 8\ 2\ 4\ 3\ 2\ 1)$	
21	$m_{21} = (1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 4\ 3\ 2\ 8\ 6\ 7\ 8\ 1)$	61	$m_{61} = (1\ 8\ 6\ 7\ 8\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 4\ 2\ 1)$	
22	$m_{22} = (1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 4\ 3\ 2\ 8\ 7\ 6\ 8\ 1)$	62	$m_{62} = (1\ 8\ 6\ 7\ 8\ 2\ 3\ 4\ 6\ 5\ 4\ 2\ 1)$	
23	$m_{23} = (1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 2\ 3\ 4\ 6\ 8\ 1)$	63	$m_{63} = (1\ 8\ 6\ 7\ 8\ 2\ 4\ 5\ 6\ 4\ 3\ 2\ 1)$	

24	$m_{24} = (1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 6\ 4\ 3\ 2\ 8\ 1)$	64	$m_{64} = (1\ 8\ 6\ 7\ 8\ 2\ 4\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1)$
25	$m_{25} = (1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 1)$	65	$m_{65} = (1\ 8\ 7\ 6\ 4\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8\ 2\ 1)$
26	$m_{26} = (1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 7\ 6\ 4\ 3\ 2\ 8\ 1)$	66	$m_{66} = (1\ 8\ 7\ 6\ 4\ 2\ 8\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1)$
27	$m_{27} = (1\ 2\ 4\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 8\ 6\ 7\ 8\ 1)$	67	$m_{67} = (1\ 8\ 7\ 6\ 4\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 2\ 1)$
28	$m_{28} = (1\ 2\ 4\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 8\ 7\ 6\ 8\ 1)$	68	$m_{68} = (1\ 8\ 7\ 6\ 4\ 3\ 2\ 8\ 6\ 5\ 4\ 2\ 1)$
29	$m_{29} = (1\ 2\ 4\ 6\ 7\ 8\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8\ 1)$	69	$m_{69} = (1\ 8\ 7\ 6\ 4\ 5\ 6\ 8\ 2\ 3\ 4\ 2\ 1)$
30	$m_{30} = (1\ 2\ 4\ 6\ 7\ 8\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 8\ 1)$	70	$m_{70} = (1\ 8\ 7\ 6\ 4\ 5\ 6\ 8\ 2\ 4\ 3\ 2\ 1)$
31	$m_{31} = (1\ 2\ 4\ 6\ 8\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 1)$	71	$m_{71} = (1\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 2\ 3\ 4\ 6\ 8\ 2\ 1)$
32	$m_{32} = (1\ 2\ 4\ 6\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 8\ 1)$	72	$m_{72} = (1\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 2\ 8\ 6\ 4\ 3\ 2\ 1)$
33	$m_{33} = (1\ 2\ 8\ 6\ 4\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 1)$	73	$m_{73} = (1\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 4\ 6\ 8\ 2\ 1)$
34	$m_{34} = (1\ 2\ 8\ 6\ 4\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 1)$	74	$m_{74} = (1\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 8\ 6\ 4\ 2\ 1)$
35	$m_{35} = (1\ 2\ 8\ 6\ 5\ 4\ 2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 1)$	75	$m_{75} = (1\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 6\ 8\ 2\ 3\ 4\ 2\ 1)$
36	$m_{36} = (1\ 2\ 8\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 4\ 6\ 7\ 8\ 1)$	76	$m_{76} = (1\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 6\ 8\ 2\ 4\ 3\ 2\ 1)$
37	$m_{37} = (1\ 2\ 8\ 7\ 6\ 4\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8\ 1)$	77	$m_{77} = (1\ 8\ 7\ 6\ 8\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 4\ 2\ 1)$
38	$m_{38} = (1\ 2\ 8\ 7\ 6\ 4\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 1)$	78	$m_{78} = (1\ 8\ 7\ 6\ 8\ 2\ 3\ 4\ 6\ 5\ 4\ 2\ 1)$
39	$m_{39} = (1\ 2\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 2\ 3\ 4\ 6\ 8\ 1)$	79	$m_{79} = (1\ 8\ 7\ 6\ 8\ 2\ 4\ 5\ 6\ 4\ 3\ 2\ 1)$
40	$m_{40} = (1\ 2\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 4\ 6\ 8\ 1)$	80	$m_{80} = (1\ 8\ 7\ 6\ 8\ 2\ 4\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1)$

Для графа **v8e12**, на котором рассчитаны все 80 ОЗМ, маршруты наибольшего мониторинга (МНМ) имеют номера: 13, 23, 25, 29, 52, 56, 58, 68 и обеспечивают полет пяти БПЛА с интервалом одно ребро с соблюдением условий безопасного полета. На маршрутах 7, 9, 15, 31, 50, 66, 72, 74 по графу **v8e12** с интервалом в одно ребро друг за другом могут лететь четыре БПЛА. Все остальные ОЗМ обеспечивают полет трех аппаратов.

В таблице 4 показано движение пяти БПЛА по ОЗМ m_{13} с соблюдением условий безопасности с интервалом одно ребро.

Таб. 4. Полет пяти БПЛА с интервалом в одно ребро по ОЗМ №13 на графе **v8e12**

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	17
1ЛА	1	2	3	4	6	7	8	2	4	5	6	8	1	2	3	4	6	7	8
2ЛА		1	2	3	4	6	7	8	2	4	5	6	8	1	2	3	4	6	7
3ЛА			1	2	3	4	6	7	8	2	4	5	6	8	1	2	3	4	6
4ЛА				1	2	3	4	6	7	8	2	4	5	6	8	1	2	3	4
5ЛА					1	2	3	4	6	7	8	2	4	5	6	8	1	2	3
6ЛА						1	2	3	4	6	7	8	2	4	5	6	8	1	2

В таблице 4 выделены полужирным начертанием вершины, в которых шестой БПЛА встретится с первым в вершинах 4 и 8 (столбцы 9, 12) и будет нарушена безопасность полета, следовательно, $count = 5$.

Над множеством ОЗМ из таблицы 3 можно провести *преобразование обращения* $\gamma_{обр}$ ОЗМ. Например, для m_{13} из таблицы 3 имеем:

$$\gamma_{\text{обр}}(1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 1) = (1\ 8\ 6\ 5\ 4\ 2\ 8\ 7\ 6\ 4\ 3\ 2\ 1) = \mathbf{m}_{56}. \quad (4)$$

Преобразование $\gamma_{\text{обр}}$ переставляет ОЗМ из таблицы 3 и переводит МНМ друг в друга.
Граф **v8e12** имеет вертикальную и горизонтальную симметрию и поэтому имеет *вертикальный и горизонтальный автоморфизмы*:

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{авт.гор}} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \\ \gamma_{\text{авт.вер.}} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

Имеем $\gamma_{\text{авт.гор}}(\mathbf{m}_{13}) = (1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 1) = (3\ 2\ 1\ 8\ 6\ 5\ 4\ 2\ 8\ 7\ 6\ 4\ 3)$.

Полученный маршрут $\gamma_{\text{авт.гор}}(\mathbf{m}_{13})$ можно превратить в маршрут из таблицы 3 с помощью преобразования *разрезания* в промежуточной вершине 1 — $\gamma_{\text{раз,1}}$. Применим преобразование $\gamma_{\text{раз,1}}$ к $(3\ 2\ 1\ 8\ 6\ 5\ 4\ 2\ 8\ 7\ 6\ 4\ 3)$:

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{раз,1}}(3\ 2\ 1\ 8\ 6\ 5\ 4\ 2\ 8\ 7\ 6\ 4\ 3) &\rightarrow (3\ 2\ 1)(1\ 8\ 6\ 5\ 4\ 2\ 8\ 7\ 6\ 4\ 3) \rightarrow \\ &\rightarrow (1\ 8\ 6\ 5\ 4\ 2\ 8\ 7\ 6\ 4\ 3)(3\ 2\ 1) = (1\ 8\ 6\ 5\ 4\ 2\ 8\ 7\ 6\ 4\ 3\ 2\ 1) = \mathbf{m}_{56}. \end{aligned} \quad (6)$$

Поэтому можно считать, что $\gamma_{\text{авт.гор}}(\mathbf{m}_{13}) = \mathbf{m}_{56}$. Следовательно, преобразования автоморфизмов $\gamma_{\text{авт.гор}}$ и $\gamma_{\text{авт.вер}}$ переставляют ОЗМ таблицы 1 и переводят МНМ в МНМ.

Операторы разрезания $\gamma_{\text{раз2(1)}}$ в первой вершине с номером 2 и разрезания $\gamma_{\text{раз2(2)}}$ во второй вершине с номером 2, примененные к МНМ \mathbf{m}_{13} дают снова МНМ \mathbf{m}_{13} :

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{раз2(1)}}(\mathbf{m}_{13}) &= \gamma_{\text{раз,1}}(1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 1) \rightarrow (1\ 2)(2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 1) \rightarrow \\ &\rightarrow (2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 1)(1\ 2) = (2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 1\ 2) = \mathbf{m}_{13}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{раз2(2)}}(\mathbf{m}_{13}) &= \gamma_{\text{раз,2}}(1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 1) \rightarrow (1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 2)(2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 1) \rightarrow \\ &\rightarrow (2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 1)(1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 2) = (2\ 4\ 5\ 6\ 8\ 1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 7\ 8\ 2) = \mathbf{m}_{13}. \end{aligned}$$

Таким образом, преобразования $\gamma_{\text{обр}}$, $\gamma_{\text{раз,1}}$, $\gamma_{\text{авт.гор}}$ и $\gamma_{\text{авт.вер}}$ переставляют ОЗМ таблицы 1, а одни маршруты наибольшего мониторинга переводятся в другие.

Для данного графа в процентном отношении доля маршрутов наибольшего мониторинга составляет $8/80 = 0,1 = 10\%$.

3. На рисунке 3 показан эйлеров граф **v8e16**, который имеет кратные ребра (1, 6) и (3, 8). В работах [5, 6] описан процесс поиска ОЗМ, являющихся целочисленными наборами из номеров вершин графа, которые обнуляют неотрицательную целевую функцию (ЦФ) графа $Z(\mathbf{m}) = Z(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$.

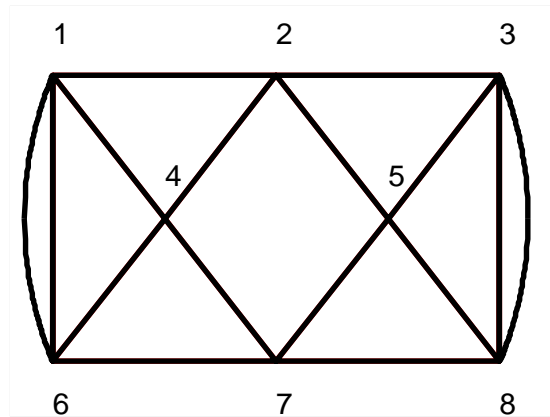


Рис. 3. Граф $v8e16$, состоящий из 8 вершин и 16 ребер

Для графа $v8e16$ ОЗМ являются наборы $\mathbf{m} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, где вершины $v_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $i = 1, \dots, n$, $n = d(\mathbf{m}) - 1$. Число ребер $d(\mathbf{m})$ в каждом ОЗМ равно половине суммы кратностей всех вершин:

$$d(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho(v_i) = 16.$$

Число вершин в каждом ОЗМ на единицу больше чем $d(\mathbf{m})$. Например, маршрут $\mathbf{m} = (1\ 2\ 3\ 8\ 7\ 6\ 1\ 4\ 2\ 5\ 3\ 8\ 5\ 7\ 4\ 6\ 1)$ является ОЗМ для эйлерова графа $v8e16$. Нетрудно проверить, что число возможных вариантов для наборов (не обязательно ОЗМ), которые можно получить из чисел $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ длиной 15 равно числу $8^{15} = 35184372088832$. Такое большое число вариантов для получения всех комбинаций номеров вершин оказывается не под силу современным пользовательским компьютерам и перебор может занять недели, месяцы и даже годы. Здесь степень равна 15, так как начало и конец маршрута фиксирован и равен выбранной вершине, например, вершине с номером 1.

Применяя метод минимизации целевой функции с помощью генетического алгоритма для вычисления оптимальных замкнутых маршрутов при числе поколений 'Generations' = 100 и числе особей в популяции 'PopulationSize' = 360, получим полную сходимость для всех значений фактора кроссовера из диапазона: $nc = n1 : nn : n2$ при $n1 = 0,1$; $nn = 0,05$; $n2 = 0,95$ (18 значений).

Время вычисления 18 оптимальных замкнутых маршрутов составило 105,8 с на компьютере с частотой 3,4 ГГц. Генетический алгоритм, по сравнению с методом прямого перебора, показывает высокую эффективность в получении *ограниченного* числа ОЗМ за малое время. Все 18 оптимальных замкнутых маршрута на графе $v8e16$ представлены в таблице 5.

В настоящее время неизвестно полное множество ОЗМ этого графа, поэтому в этом случае можно говорить только о поиске маршрута максимального мониторинга (МММ) графа $v8e16$ в подмножестве насчитанных маршрутов.

Таб. 5. Результаты расчета ОЗМ на графе **v8e16** с помощью ГА

ОЗМ	
$m_1 = 1\ 6\ 7\ 8\ 3\ 5\ 2\ 1\ 6\ 4\ 7\ 5\ 8\ 3\ 2\ 4\ 1$	$m_{10} = 1\ 6\ 4\ 7\ 5\ 8\ 7\ 6\ 1\ 2\ 3\ 8\ 3\ 5\ 2\ 4\ 1$
$m_2 = 1\ 6\ 1\ 4\ 6\ 7\ 8\ 3\ 8\ 5\ 7\ 4\ 2\ 3\ 5\ 2\ 1$	$m_{11} = 1\ 6\ 7\ 8\ 3\ 8\ 5\ 2\ 3\ 5\ 7\ 4\ 2\ 1\ 4\ 6\ 1$
$m_3 = 1\ 6\ 4\ 7\ 8\ 5\ 2\ 3\ 8\ 3\ 5\ 7\ 6\ 1\ 4\ 2\ 1$	$m_{12} = 1\ 2\ 5\ 3\ 8\ 3\ 2\ 4\ 7\ 5\ 8\ 7\ 6\ 1\ 4\ 6\ 1$
$m_4 = 1\ 6\ 7\ 8\ 3\ 8\ 5\ 2\ 4\ 1\ 2\ 3\ 5\ 7\ 4\ 6\ 1$	$m_{13} = 1\ 2\ 5\ 7\ 6\ 1\ 4\ 7\ 8\ 5\ 3\ 8\ 3\ 2\ 4\ 6\ 1$
$m_5 = 1\ 6\ 7\ 5\ 3\ 8\ 3\ 2\ 1\ 6\ 4\ 7\ 8\ 5\ 2\ 4\ 1$	$m_{14} = 1\ 6\ 4\ 7\ 5\ 3\ 8\ 3\ 2\ 4\ 1\ 6\ 7\ 8\ 5\ 2\ 1$
$m_6 = 1\ 6\ 7\ 8\ 3\ 2\ 4\ 7\ 5\ 3\ 8\ 5\ 2\ 1\ 4\ 6\ 1$	$m_{15} = 1\ 6\ 7\ 4\ 2\ 3\ 8\ 3\ 5\ 8\ 7\ 5\ 2\ 1\ 4\ 6\ 1$
$m_7 = 1\ 6\ 4\ 1\ 6\ 7\ 4\ 2\ 3\ 8\ 3\ 5\ 7\ 8\ 5\ 2\ 1$	$m_{16} = 1\ 6\ 7\ 8\ 3\ 5\ 8\ 3\ 2\ 5\ 7\ 4\ 6\ 1\ 4\ 2\ 1$
$m_8 = 1\ 2\ 5\ 8\ 3\ 5\ 7\ 6\ 1\ 6\ 4\ 2\ 3\ 8\ 7\ 4\ 1$	$m_{17} = 1\ 4\ 7\ 6\ 4\ 2\ 3\ 8\ 3\ 5\ 7\ 8\ 5\ 2\ 1\ 6\ 1$
$m_9 = 1\ 6\ 4\ 2\ 5\ 8\ 7\ 4\ 1\ 2\ 3\ 8\ 3\ 5\ 7\ 6\ 1$	$m_{18} = 1\ 6\ 4\ 2\ 3\ 8\ 3\ 5\ 8\ 7\ 6\ 1\ 4\ 7\ 5\ 2\ 1$

Только маршрут $m_1 = (1\ 6\ 7\ 8\ 3\ 5\ 2\ 1\ 6\ 4\ 7\ 5\ 8\ 3\ 2\ 4\ 1)$ из всех оптимальных замкнутых маршрутов, представленных в таблице 5, позволяет реализовать полет шести БПЛА. Схема полета группы, состоящей из шести летательных аппаратов, по данному маршруту на графе **v8e16** с интервалом в одно ребро показана в таблице 6.

Таб. 6. Полет шести БПЛА с интервалом в одно ребро по графу **v8e16**

№ столбца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ЛА №1	1	6	7	8	3	5	2	1	6	4	7	5	8	3	2	4	1	4	6	7	8	3
ЛА №2	4	1	6	7	8	3	5	2	1	6	4	7	5	8	3	2	4	1	4	6	7	8
ЛА №3	2	4	1	6	7	8	3	5	2	1	6	4	7	5	8	3	2	4	1	4	6	7
ЛА №4	3	2	4	1	6	7	8	3	5	2	1	6	4	7	5	8	3	2	4	1	4	6
ЛА №5	8	3	2	4	1	6	7	8	3	5	2	1	6	4	7	5	8	3	2	4	1	4
ЛА №6	5	8	3	2	4	1	6	7	8	3	5	2	1	6	4	7	5	8	3	2	4	1
ЛА №7	7	5	8	3	2	4	1	6	7	8	3	5	2	1	6	4	7	5	8	3	2	4

Разделитель «|» показывает, где «сшиваются» одинаковые маршруты. Из таблицы 6 видно, что при движении первых 6 БПЛА друг за другом с интервалом в одно ребро они не встречаются в вершинах графа с одинаковыми номерами или на одном и том же ребре. Если добавить седьмой БПЛА, то в вершинах 5 (12 столбец) и 4 (16 столбец) одновременно находятся два БПЛА. Для исключения пересечения маршрутов БПЛА в одинаковых вершинах и ребрах графа можно запустить только 6 БПЛА. Таким образом, для графа **v8e16** ОЗМ m_1 из таблицы 5 является маршрутом максимального мониторинга (МММ) и максимальное число БПЛА в безопасном полете друг за другом с интервалом одно ребро равно шести.

Таким образом, вероятность МММ из 18 ОЗМ равна $1:18 = 0,055555 \approx 5,6\%$. Является ли этот МММ равным МНМ требует дополнительного исследования.

При использовании *оператора разрезания* $\gamma_{\text{раз}}$ ОЗМ в промежуточной точке с номером 1 можно получить новые маршруты. Оператор разрезания $\gamma_{\text{раз}1}$ переставляет правый и левый блоки вершин, ограниченные единицами, местами. Например, для \mathbf{m}_1 из таблицы 5 имеем:

$$\begin{aligned} &\gamma_{\text{раз}1}(1\ 6\ 7\ 8\ 3\ 5\ 2\ 1\ 6\ 4\ 7\ 5\ 8\ 3\ 2\ 4\ 1) \rightarrow (1\ 6\ 7\ 8\ 3\ 5\ 2\ 1)(1\ 6\ 4\ 7\ 5\ 8\ 3\ 2\ 4\ 1) \rightarrow \\ &\rightarrow (1\ 6\ 4\ 7\ 5\ 8\ 3\ 2\ 4\ 1)(1\ 6\ 7\ 8\ 3\ 5\ 2\ 1) \rightarrow (1\ 6\ 4\ 7\ 5\ 8\ 3\ 2\ 4\ 1\ 6\ 7\ 8\ 3\ 5\ 2\ 1) = \mathbf{m}_{19}. \end{aligned} \quad (7)$$

Легко проверить, что такого ОЗМ в таблице 5 нет.

Можно использовать *преобразование обращения* (инверсии) $\gamma_{\text{обр}}$, которое переставляет номера вершин маршрута в обратной последовательности. Например, для ОЗМ \mathbf{m}_1 из таблицы 5 имеем:

$$\gamma_{\text{обр}}(\mathbf{m}_1) = \gamma_{\text{обр}}(1\ 6\ 7\ 8\ 3\ 5\ 2\ 1\ 6\ 4\ 7\ 5\ 8\ 3\ 2\ 4\ 1) = (1\ 4\ 2\ 3\ 8\ 5\ 7\ 4\ 6\ 1\ 2\ 5\ 3\ 8\ 7\ 6\ 1) = \mathbf{m}_{20}.$$

Маршрут \mathbf{m}_{20} не входит в таблицу 5. Легко проверить, что он является МММ.

Граф **v8e16** (рис. 3) имеет вертикальную и горизонтальную симметрии, которые порождают два автоморфизма графа:

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{авт.гор.}} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\ \gamma_{\text{авт.вер.}} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

При использовании автоморфизмов (8) можно получать новые маршруты. Например, для ОЗМ \mathbf{m}_1 из таблицы 5 имеем:

$$\begin{aligned} &\gamma_{\text{авт.гор.}}(1\ 6\ 7\ 8\ 3\ 5\ 2\ 1\ 6\ 4\ 7\ 5\ 8\ 3\ 2\ 4\ 1) = \\ &= (6\ 1\ 2\ 3\ 8\ 5\ 7\ 6\ 1\ 4\ 2\ 5\ 3\ 8\ 7\ 4\ 6); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &\gamma_{\text{авт.вер.}}(1\ 6\ 7\ 8\ 3\ 5\ 2\ 1\ 6\ 4\ 7\ 5\ 8\ 3\ 2\ 4\ 1) = \\ &= (3\ 8\ 7\ 6\ 1\ 4\ 2\ 3\ 8\ 5\ 7\ 4\ 6\ 1\ 2\ 5\ 3). \end{aligned}$$

Для получения из этих оптимальных замкнутых маршрутов, начинающихся в вершине с номером 1, достаточно применить к ним преобразование $\gamma_{\text{раз}}$ в первой $\gamma_{\text{раз}1(1)}$ или во второй точке с номером 1 $\gamma_{\text{раз}1(2)}$. С помощью преобразований $\gamma_{\text{раз}}$, $\gamma_{\text{обр}}$, $\gamma_{\text{авт.гор}}$ и $\gamma_{\text{авт.вер}}$ из 18 ОЗМ (таблица 5) можно получить 95 различных ОЗМ. Если предположить, что пролет каждого ребра графа проходит за одинаковое время, то можно рассмотреть различные схемы совместного полета группировки БПЛА [7, 8, 9].

Число МММ можно увеличить в несколько раз за счет применения операторов $\gamma_{\text{раз}}$, $\gamma_{\text{обр}}$, $\gamma_{\text{авт.гор}}$ и $\gamma_{\text{авт.вер}}$:

$$\gamma_{\text{раз},1}(\mathbf{m}_1) = \gamma_{\text{раз},1}(1\ 6\ 7\ 8\ 3\ 5\ 2\ 1\ 6\ 4\ 7\ 5\ 8\ 3\ 2\ 4\ 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow (1\ 6\ 7\ 8\ 3\ 5\ 2\ 1)(1\ 6\ 4\ 7\ 5\ 8\ 3\ 2\ 4\ 1) \rightarrow (1\ 6\ 4\ 7\ 5\ 8\ 3\ 2\ 4\ 1\ 6\ 7\ 8\ 3\ 5\ 2\ 1) = \mathbf{m}_{21};$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{авт. гор.}}(\mathbf{m}_1) &= \gamma_{\text{авт. гор.}}(1\ 6\ 7\ 8\ 3\ 5\ 2\ 1\ 6\ 4\ 7\ 5\ 8\ 3\ 2\ 4\ 1) = \\ &= (6\ 1\ 2\ 3\ 8\ 5\ 7\ 6\ 1\ 4\ 2\ 5\ 3\ 8\ 7\ 4\ 6) \rightarrow \gamma_{\text{раз,1}}(6\ 1\ 2\ 3\ 8\ 5\ 7\ 6\ 1\ 4\ 2\ 5\ 3\ 8\ 7\ 4\ 6) \rightarrow \\ &\rightarrow (6\ 1)(1\ 2\ 3\ 8\ 5\ 7\ 6\ 1\ 4\ 2\ 5\ 3\ 8\ 7\ 4\ 6) \rightarrow (1\ 2\ 3\ 8\ 5\ 7\ 6\ 1\ 4\ 2\ 5\ 3\ 8\ 7\ 4\ 6)(6\ 1) = \\ &= (1\ 2\ 3\ 8\ 5\ 7\ 6\ 1\ 4\ 2\ 5\ 3\ 8\ 7\ 4\ 6\ 1) = \mathbf{m}_{22}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{авт. вер.}}(1\ 6\ 7\ 8\ 3\ 5\ 2\ 1\ 6\ 4\ 7\ 5\ 8\ 3\ 2\ 4\ 1) &= (3\ 8\ 7\ 6\ 1\ 4\ 2\ 3\ 8\ 5\ 7\ 4\ 6\ 1\ 2\ 5\ 3) \rightarrow \\ &= \gamma_{\text{раз,1}}(3\ 8\ 7\ 6\ 1\ 4\ 2\ 3\ 8\ 5\ 7\ 4\ 6\ 1\ 2\ 5\ 3) \rightarrow (3\ 8\ 7\ 6\ 1)(1\ 4\ 2\ 3\ 8\ 5\ 7\ 4\ 6\ 1\ 2\ 5\ 3) \rightarrow \\ &\rightarrow (1\ 4\ 2\ 3\ 8\ 5\ 7\ 4\ 6\ 1\ 2\ 5\ 3)(3\ 8\ 7\ 6\ 1) \rightarrow (1\ 4\ 2\ 3\ 8\ 5\ 7\ 4\ 6\ 1\ 2\ 5\ 3\ 8\ 7\ 6\ 1) = \mathbf{m}_{23}. \end{aligned} \quad (10)$$

ОЗМ $\mathbf{m}_{19}, \mathbf{m}_{20}, \mathbf{m}_{21}, \mathbf{m}_{22}, \mathbf{m}_{23}$ нет в таблице 5, таким образом, применяя повторно операторы $\gamma_{\text{раз}}, \gamma_{\text{обр}}, \gamma_{\text{авт. гор}}$ и $\gamma_{\text{авт. вер}}$ можно получить новые маршруты максимального мониторинга, но максимальное число БПЛА, *count*, на всех этих МММ будет одно и тоже — 6.

Для рассредоточенного порядка применения группировки БПЛА можно использовать тот же ОЗМ \mathbf{m}_1 . Это следует из таблицы 6, если исключить из нее 2-й и 4-й БПЛА. Рассредоточенный полет группировки через три ребра можно реализовать через различные ОЗМ. Такой полет группировки может оказаться предпочтительнее, так как увеличивает непредсказуемость появления БПЛА в вершинах и на ребрах графа **v8e16**. Непредсказуемость полета группировки увеличивается при применении к каждому маршруту полета автоморфизмов (8), которые меняют маршруты на графе **v8e16** [10, 11, 12]. Это показано в таблице 7.

Таб. 7. Полет трех БПЛА по разным маршрутам с интервалом в три ребра

№ столбца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
ОЗМ \mathbf{m}_1	1	6	7	8	3	5	2	1	6	4	7	5	8	3	2	4	1	6	7	8	3	5	2	1
ОЗМ \mathbf{m}_{17}	2	1	6	1	4	7	6	4	2	3	8	3	5	7	8	5	2	1	6	1	4	7	6	4
ОЗМ \mathbf{m}_9	3	8	3	5	7	6	1	6	4	2	5	8	7	4	1	2	3	8	3	5	7	6	1	6

Четвертый маршрут для таблицы 7 подобрать не удастся из того множества ОЗМ, которое имеется в таблице 5, но это не означает, что его не существует в полном множестве ОЗМ.

Таким образом, чем больше ОЗМ известно, тем больше вариантов совместного полета можно спланировать.

4. Рассмотрим эйлеров граф **v15e28**, который состоит из 15 вершин, соединенных 28 ребрами, представленный на рисунке 4.

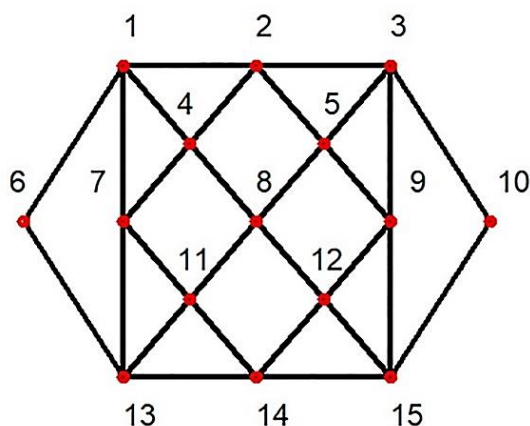


Рис. 4. Граф $v_{15e_{28}}$

Оптимальные замкнутые маршруты на этом графе, полученные с помощью генетического алгоритма, представлены в таблице 8.

Таб. 8. Оптимальные замкнутые маршруты на графе $v_{15e_{28}}$

ОЗМ	
m_1	= 1 4 2 5 3 2 1 7 11 13 14 12 15 9 5 8 11 14 15 10 3 9 12 8 4 7 13 6 1
m_2	= 1 6 13 7 4 8 11 14 15 12 8 5 2 3 5 9 3 10 15 9 12 14 13 11 7 1 4 2 1
m_3	= 1 7 4 2 5 9 3 5 8 4 1 2 3 10 15 14 13 11 14 12 9 15 12 8 11 7 13 6 1
m_4	= 1 6 13 14 11 8 5 3 2 4 1 7 11 13 7 4 8 12 14 15 9 3 10 15 12 9 5 2 1
m_5	= 1 2 5 3 2 4 8 11 13 7 11 14 15 12 8 5 9 15 10 3 9 12 14 13 6 1 4 7 1
m_6	= 1 2 5 3 10 15 9 5 8 11 13 14 11 7 13 6 1 4 8 12 14 15 12 9 3 2 4 7 1
m_7	= 1 7 13 6 1 4 8 12 15 9 12 14 15 10 3 5 8 11 13 14 11 7 4 2 5 9 3 2 1
m_8	= 1 4 2 5 9 15 14 13 7 4 8 5 3 9 12 8 11 14 12 15 10 3 2 1 6 13 11 7 1
m_9	= 1 7 4 2 1 6 13 11 14 15 9 3 5 9 12 15 10 3 2 5 8 12 14 13 7 11 8 4 1
m_{10}	= 1 2 5 8 4 1 6 13 7 4 2 3 10 15 14 13 11 8 12 9 3 5 9 15 12 14 11 7 1
m_{11}	= 1 4 7 11 14 15 9 3 2 1 6 13 14 12 8 5 3 10 15 12 9 5 2 4 8 11 13 7 1
m_{12}	= 1 4 7 1 2 3 10 15 12 14 15 9 12 8 5 3 9 5 2 4 8 11 13 7 11 14 13 6 1
m_{13}	= 1 6 13 14 12 9 15 14 11 13 7 11 8 5 2 3 5 9 3 10 15 12 8 4 1 7 4 2 1
m_{14}	= 1 4 8 5 9 3 5 2 4 7 1 6 13 14 12 8 11 7 13 11 14 15 9 12 15 10 3 2 1
m_{15}	= 1 2 5 3 9 12 14 13 7 4 2 3 10 15 14 11 7 1 4 8 12 15 9 5 8 11 13 6 1
m_{16}	= 1 6 13 7 4 2 1 4 8 12 15 9 3 2 5 8 11 14 15 10 3 5 9 12 14 13 11 7 1
m_{17}	= 1 6 13 11 8 5 3 10 15 12 14 11 7 4 8 12 9 5 2 4 1 7 13 14 15 9 3 2 1
m_{18}	= 1 2 5 3 10 15 14 13 7 4 8 12 9 15 12 14 11 8 5 9 3 2 4 1 7 11 13 6 1
m_{19}	= 1 4 2 3 10 15 12 8 4 7 13 11 8 5 3 9 12 14 13 6 1 2 5 9 15 14 11 7 1

Для увеличения числа ОЗМ таблицы 8 могут применяться автоморфизмы горизонтальной и вертикальной симметрии графа, операторы разрезания и инверсии, подобные формулам

(7) – (9). В результате этого были получены 139 маршрутов. Применяя к полученному множеству ОЗМ программу поиска маршрута максимального мониторинга, которая проверяет каждый маршрут на реализацию безопасного группового полета с интервалом одно ребро, получим, что максимальное число БПЛА будет такое же, как и для ОЗМ из таблицы 8.

Алгоритм поиска МММ состоит в том, что из каждого ОЗМ таблицы 8 формируется матрица по количеству столбцов вдвое превышающая длину ОЗМ, за вычетом двух, т.к. первая и последняя вершины закреплены в точке 1. Такое увеличение необходимо для того, чтобы смоделировать сдвиг на одно ребро гипотетически максимально возможного (равного числу вершин) количества летательных аппаратов, двигающихся друг за другом с интервалом в одно ребро на графе, как это имеет место на циклическом графе. Тогда, на графе из k вершин и k ребер возможен групповой полет k БПЛА, т.е. число МНМ равно k , а число ОЗМ равно двум: $(1, 2, 3, \dots, k - 1, k, 1)$ и $(1, k, k - 1, \dots, 3, 2, 1)$. Так как k -й аппарат только начнет свое движение тогда, когда первый БПЛА будет уже в предпоследней вершине (в ОЗМ первая и последняя вершины совпадают), когда k -й аппарат переместится во 2, 3 и последующие вершины — первый БПЛА (а затем и следующие за ним) пойдет на второй круг.

Для произвольного графа количество БПЛА в группе значительно меньше k и зависит в первую очередь от геометрии графа, во вторую — от выборки найденных маршрутов, т.к. на одном и том же графе по разным ОЗМ может одновременно двигаться разное число летательных аппаратов.

Если расположить один и тот же оптимальный замкнутый маршрут из таблицы 8 друг под другом со сдвигом в одно ребро, то получим для этого ОЗМ матрицу (11):

$$M = (m_i(j)), i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, 29. \tag{11}$$

Номера вершин первого маршрута располагаются в верхней строке матрицы с индексом $i = 1$, занимая первые 29 позиций с $j = 1$ по $j = 29$, начиная с 30 элемента в эту же строку копируются номера вершин этого же ОЗМ с индексами от $j = 2$ до $j = 28$ (рис. 5).



Рис. 5. Проверка ОЗМ m_{19} на графе v_{15e28} смещением в одно ребро на совпадение номеров вершин в столбцах

Во второй строке матрицы $i = 2$ вектор номеров вершин маршрута \mathbf{m}_{19} располагается со сдвигом в одно ребро, т.е. с $j = 2$ по $j = 30$, а начиная с $j = 31$ по $j = 57$ записываются номера вершин вектора $\mathbf{m}_{19}(i)$ с индексами от $i = 2$ до $i = 27$, а номер вершины, находящийся в векторе $\mathbf{m}_{19}(i)$ на 28 позиции, располагается в первом столбце $j = 1$, имитируя нахождение второго БПЛА в предпоследней вершине маршрута, в то время как первый БПЛА уже вернулся в вершину один, которая является как начальной, так и конечной вершиной замкнутого маршрута, и готов совершить «заход на второй круг».

Аналогичным образом, третий БПЛА в этот момент времени находится за две вершины до окончания маршрута, 4-й — за три вершины и т.д. Следовательно, значение переменной i показывает номер строки, описываемой матрицы и порядковый номер БПЛА в группе. На каждой итерации цикла в матрицу добавляются строки с тем же самым маршрутом, но со сдвигом на одно ребро.

Внутренний цикл осуществляет проверку номеров вершин в каждом столбце, пока не обнаружится их совпадение, что сигнализирует о ситуации попадания одновременно двух БПЛА в одну и ту же реперную точку (вершину графа). Следовательно, летательный аппарат с текущим значением i будет при одновременном движении группы «лишним», значит, число БПЛА (*count*) равно номеру текущей строки минус один: $count = i - 1$.

Таким образом, на рисунке 5 изображён маршрут $\mathbf{m}_{19} = (1\ 4\ 2\ 3\ 10\ 15\ 12\ 8\ 4\ 7\ 13\ 11\ 8\ 5\ 3\ 9\ 12\ 14\ 13\ 6\ 1\ 2\ 5\ 9\ 15\ 14\ 11\ 7\ 1)$ из таблицы 8, по которому возможен полет группы в составе пяти БПЛА с интервалом в одно ребро друг за другом, удовлетворяющий требованиям безопасности.

Модифицированную растяжением в ширину почти в два раза матрицу одного и того же ОЗМ (11) подвергают построчно проверке на совпадение в столбцах номеров вершин и определяют число строк-слоев, когда наступило первое совпадение. Далее в подпрограмме, позволяющей провести поиск наибольшего числа БПЛА в группе, осуществлялся отбор наилучшего ОЗМ с наибольшим числом слоев-строк несовпадения номеров вершин в столбцах.

Группа из трёх аппаратов является наименьшей из всех обнаруженных в результате расчётов, но и наиболее часто встречающейся на ОЗМ графа **v15e28**.

Наилучшим результатом среди рассматриваемых оптимальных замкнутых маршрутов оказался маршрут $\mathbf{m}_{17} = (1\ 6\ 13\ 11\ 8\ 5\ 3\ 10\ 15\ 12\ 14\ 11\ 7\ 4\ 8\ 12\ 9\ 5\ 2\ 4\ 1\ 7\ 13\ 14\ 15\ 9\ 3\ 2\ 1)$, позволяющий одновременный полёт шести беспилотных летательных аппаратов (рис. 6).

	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	...		
1-й БПЛА		1	6	13	11	8	5	3	10	15	12	14	11	7	4	8	12	9	5	2	4	1	7	13	14	15	9	3	2	1		
2-й БПЛА		2	1	6	13	11	8	5	3	10	15	12	14	11	7	4	8	12	9	5	2	4	1	7	13	14	15	9	3	2	1	
3-й БПЛА		3	2	1	6	13	11	8	5	3	10	15	12	14	11	7	4	8	12	9	5	2	4	1	7	13	14	15	9	3	2	1	
4-й БПЛА		9	3	2	1	6	13	11	8	5	3	10	15	12	14	11	7	4	8	12	9	5	2	4	1	7	13	14	15	9	3	2	1	
5-й БПЛА		15	9	3	2	1	6	13	11	8	5	3	10	15	12	14	11	7	4	8	12	9	5	2	4	1	7	13	14	15	9	3	2	1
6-й БПЛА		14	15	9	3	2	1	6	13	11	8	5	3	10	15	12	14	11	7	4	8	12	9	5	2	4	1	7	13	14	15	9	3	2	1
7-й БПЛА		13	14	15	9	3	2	1	6	13	11	8	5	3	10	15	12	14	11	7	4	8	12	9	5	2	4	1	7	13	14	15	9	3	2	1

Рис. 6. Одновременный полёт группы из 6 БПЛА по ОЗМ \mathbf{m}_{17}

Обобщённые результаты поиска оптимальных замкнутых эйлеровых маршрутов с различным количеством БПЛА в группе на графе **v15e28** показаны в таблице 9.

Таб. 9. Итоговая таблица ОЗМ с различным количеством БПЛА в группе на графе $v15e28$

№	ОЗМ, по которым могут двигаться группы в составе 3, 4, 5 и 6 БПЛА
3 БПЛА	1 6 13 7 4 1 2 5 9 12 15 10 3 2 4 8 12 14 15 9 3 5 8 11 13 14 11 7 1
4 БПЛА	1 4 8 12 9 5 2 3 9 15 12 14 11 8 5 3 10 15 14 13 11 7 1 2 4 7 13 6 1
5 БПЛА	1 2 5 3 10 15 14 11 8 12 15 9 5 8 4 1 6 13 11 7 4 2 3 9 12 14 13 7 1
6 БПЛА	1 6 13 11 8 5 3 10 15 12 14 11 7 4 8 12 9 5 2 4 1 7 13 14 15 9 3 2 1

Проведенный поиск приводит к нахождению маршрута максимального мониторинга на графе $v15e28$.

Наилучшим результатом оказался маршрут m_{17} , позволяющий осуществить одновременный полёт шести БПЛА с интервалом в одно ребро:

$$m_{17} = \text{МММ} = (1\ 6\ 13\ 11\ 8\ 5\ 3\ 10\ 15\ 12\ 14\ 11\ 7\ 4\ 8\ 12\ 9\ 5\ 2\ 4\ 1\ 7\ 13\ 14\ 15\ 9\ 3\ 2\ 1).$$

МММ может быть размножен в несколько раз с помощью операторов: $\gamma_{\text{раз}}$, $\gamma_{\text{обр}}$, $\gamma_{\text{авт. гор}}$ и $\gamma_{\text{авт. вер}}$. Вероятность МММ в таблице 8 равна $1:19 = 0,0526 \approx 5,3\%$.

5. Рассмотрим граф $v18e36$, состоящий из 18 вершин и 36 ребер, и проведем расчет маршрута (или маршрутов) максимального мониторинга группового полета (рис. 7).

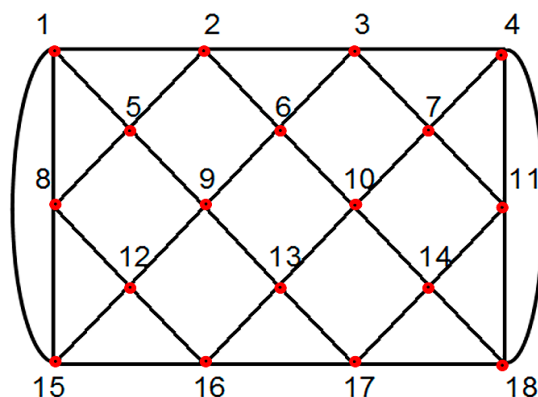


Рис. 7. Граф $v18e36$, состоящий из 18 вершин и 36 ребер

Для графа большой размерности $v18e36$ расчет замкнутых маршрутов целесообразно проводить с помощью генетического алгоритма с использованием векторной целевой функции (ВЦФ) [13, 14, 15]. Для получения большого количества маршрутов целесообразно осуществлять вызов ГА в счетном цикле.

В таблице 10 приведены ОЗМ графа $v18e36$, рассчитанные ГА.

Таб. 10. Результаты расчета ОЗМ графа $v18e36$ с помощью векторной ЦФ

ОЗМ	
$m_1 =$	1 2 6 3 7 10 14 11 4 18 17 13 10 6 9 12 16 13 9 5 8 1 15 8 12 15 16 17 14 18 11 7 4 3 2 5 1
$m_2 =$	1 15 16 13 10 7 4 3 7 11 4 18 17 16 12 15 8 12 9 13 17 14 18 11 14 10 6 2 3 6 9 5 8 1 2 5 1
$m_3 =$	1 2 6 10 7 4 18 11 4 3 2 5 8 12 16 13 17 18 14 10 13 9 6 3 7 11 14 17 16 15 8 1 5 9 12 15 1
$m_4 =$	1 15 12 9 6 10 13 16 15 8 5 9 13 17 14 11 7 4 3 7 10 14 18 11 4 18 17 16 12 8 1 2 3 6 2 5 1
$m_5 =$	1 15 8 12 9 13 17 14 18 4 3 6 2 3 7 10 13 16 12 15 16 17 18 11 7 4 11 14 10 6 9 5 8 1 2 5 1
$m_6 =$	1 2 5 8 1 15 8 12 16 13 17 16 15 12 9 13 10 6 3 4 11 18 4 7 11 14 17 18 14 10 7 3 2 6 9 5 1
$m_7 =$	1 15 8 5 1 8 12 16 17 13 16 15 12 9 6 3 7 4 3 2 6 10 7 11 4 18 17 14 18 11 14 10 13 9 5 2 1
$m_8 =$	1 8 12 16 13 10 14 18 17 16 15 12 9 13 17 14 11 7 4 18 11 4 3 7 10 6 3 2 5 9 6 2 1 5 8 15 1
$m_9 =$	1 15 12 16 17 13 10 14 11 18 14 17 18 4 7 11 4 3 7 10 6 9 13 16 15 8 12 9 5 8 1 5 2 3 6 2 1
$m_{10} =$	1 5 8 1 15 16 12 15 8 12 9 5 2 6 10 14 18 4 7 3 6 9 13 16 17 18 11 7 10 13 17 14 11 4 3 2 1
$m_{11} =$	1 2 5 9 6 2 3 6 10 14 17 18 14 11 18 4 11 7 4 3 7 10 13 9 12 16 17 13 16 15 8 1 5 8 12 15 1
$m_{12} =$	1 8 12 9 6 10 7 4 18 17 14 18 11 4 3 2 6 3 7 11 14 10 13 16 12 15 1 2 5 8 15 16 17 13 9 5 1
$m_{13} =$	1 8 12 15 1 2 3 4 7 10 13 16 17 14 18 11 7 3 6 2 5 8 15 16 12 9 6 10 14 11 4 18 17 13 9 5 1
$m_{14} =$	1 8 12 16 15 12 9 6 10 13 16 17 14 18 4 3 6 2 1 5 2 3 7 11 4 7 10 14 11 18 17 13 9 5 8 15 1
$m_{15} =$	1 5 8 12 16 13 17 16 15 8 1 2 3 4 18 17 14 10 6 9 5 2 6 3 7 4 11 18 14 11 7 10 13 9 12 15 1
$m_{16} =$	1 2 5 8 12 15 16 13 9 12 16 17 18 11 7 4 11 14 17 13 10 7 3 2 6 10 14 18 4 3 6 9 5 1 15 8 1
$m_{17} =$	1 5 2 1 8 5 9 6 3 7 11 4 7 10 13 17 14 11 18 4 3 2 6 10 14 18 17 16 12 8 15 12 9 13 16 15 1
$m_{18} =$	1 5 9 12 16 13 9 6 3 2 5 8 15 16 17 14 18 17 13 10 7 4 11 18 4 3 7 11 14 10 6 2 1 8 12 15 1
$m_{19} =$	1 5 8 1 15 16 12 8 15 12 9 6 2 3 6 10 7 4 3 7 11 18 4 11 14 10 13 17 18 14 17 16 13 9 5 2 1
$m_{20} =$	1 8 5 1 2 6 9 13 16 17 14 10 7 11 14 18 17 13 10 6 3 4 11 18 4 7 3 2 5 9 12 15 16 12 8 15 1
$m_{21} =$	1 8 12 9 6 2 3 4 18 11 7 10 6 3 7 4 11 14 17 16 15 1 5 9 13 17 18 14 10 13 16 12 15 8 5 2 1
$m_{22} =$	1 2 3 7 11 18 14 10 13 17 18 4 7 10 6 3 4 11 14 17 16 12 8 1 15 8 5 2 6 9 13 16 15 12 9 5 1
$m_{23} =$	1 2 3 6 10 13 16 17 14 11 4 7 11 18 4 3 7 10 14 18 17 13 9 12 15 16 12 8 5 2 6 9 5 1 8 15 1
$m_{24} =$	1 2 3 6 10 14 17 18 11 4 7 3 4 18 14 11 7 10 13 16 12 15 8 5 1 15 16 17 13 9 5 2 6 9 12 8 1
$m_{25} =$	1 2 3 7 4 3 6 9 12 8 15 16 17 18 4 11 14 17 13 10 7 11 18 14 10 6 2 5 8 1 15 12 16 13 9 5 1
$m_{26} =$	1 15 12 16 13 10 6 2 1 8 15 16 17 18 14 10 7 4 11 7 3 6 9 13 17 14 11 18 4 3 2 5 8 12 9 5 1
$m_{27} =$	1 5 8 12 16 13 17 14 10 13 9 6 3 7 4 11 7 10 6 2 1 15 16 17 18 11 14 18 4 3 2 5 9 12 15 8 1
$m_{28} =$	1 8 15 16 13 9 6 3 4 7 3 2 6 10 14 11 18 17 13 10 7 11 4 18 14 17 16 12 9 5 1 2 5 8 12 15 1
$m_{29} =$	1 2 3 6 2 5 8 15 12 8 1 15 16 17 18 11 4 3 7 4 18 14 10 6 9 12 16 13 10 7 11 14 17 13 9 5 1
$m_{30} =$	1 15 16 17 14 10 13 9 12 8 15 12 16 13 17 18 14 11 18 4 3 6 10 7 11 4 7 3 2 6 9 5 2 1 8 5 1
$m_{31} =$	1 8 5 9 13 16 12 8 15 16 17 14 18 4 11 18 17 13 10 14 11 7 4 3 6 9 12 15 1 2 6 10 7 3 2 5 1
$m_{32} =$	1 15 8 12 16 17 14 10 7 3 2 6 3 4 7 11 14 18 4 11 18 17 13 16 15 12 9 13 10 6 9 5 8 1 2 5 1
$m_{33} =$	1 5 9 6 2 3 7 4 11 14 10 6 3 4 18 17 13 16 15 12 9 13 10 7 11 18 14 17 16 12 8 1 2 5 8 15 1
$m_{34} =$	1 5 8 12 16 17 18 11 4 18 14 10 13 16 15 12 9 13 17 14 11 7 10 6 2 3 4 7 3 6 9 5 2 1 15 8 1
$m_{35} =$	1 8 12 16 17 14 11 18 17 13 10 14 18 4 11 7 3 4 7 10 6 9 12 15 1 2 6 3 2 5 8 15 16 13 9 5 1
$m_{36} =$	1 2 5 8 15 1 8 12 15 16 12 9 6 3 2 6 10 7 3 4 7 11 18 14 17 13 10 14 11 4 18 17 16 13 9 5 1
$m_{37} =$	1 8 12 9 13 17 14 11 18 14 10 6 9 5 2 3 7 10 13 16 17 18 4 7 11 4 3 6 2 1 5 8 15 12 16 15 1
$m_{38} =$	1 15 16 17 14 11 4 18 14 10 13 16 12 8 5 9 6 3 7 11 18 17 13 9 12 15 8 1 2 3 4 7 10 6 2 5 1
$m_{39} =$	1 5 8 15 12 9 6 2 3 6 10 13 9 5 2 1 15 16 13 17 18 11 4 3 7 4 18 14 11 7 10 14 17 16 12 8 1
$m_{40} =$	1 15 12 16 17 13 16 15 8 1 5 9 12 8 5 2 3 6 10 14 17 18 14 11 4 7 3 4 18 11 7 10 13 9 6 2 1
$m_{41} =$	1 8 12 15 16 12 9 6 3 7 11 4 18 11 14 17 16 13 10 14 18 17 13 9 5 8 15 1 5 2 3 4 7 10 6 2 1
$m_{42} =$	1 8 5 9 12 8 15 16 17 14 11 7 4 18 14 10 6 3 2 5 1 15 12 16 13 10 7 3 4 11 18 17 13 9 6 2 1
$m_{43} =$	1 2 5 9 12 16 13 10 6 3 7 10 14 18 11 4 7 11 14 17 18 4 3 2 6 9 13 17 16 15 8 5 1 8 12 15 1
$m_{44} =$	1 2 5 8 15 16 17 18 11 4 7 11 14 10 7 3 2 6 10 13 17 14 18 4 3 6 9 12 8 1 15 12 16 13 9 5 1
$m_{45} =$	1 5 8 12 16 17 18 11 4 3 2 5 9 12 15 16 13 10 14 18 4 7 3 6 10 7 11 14 17 13 9 6 2 1 8 15 1
$m_{46} =$	1 15 12 16 13 17 18 14 10 7 4 18 11 4 3 6 10 13 9 12 8 15 16 17 14 11 7 3 2 6 9 5 8 1 5 2 1
$m_{47} =$	1 5 2 3 4 18 14 17 16 12 15 16 13 10 14 11 7 4 11 18 17 13 9 5 8 1 2 6 10 7 3 6 9 12 8 15 1
$m_{48} =$	1 2 5 1 15 12 8 5 9 6 3 7 10 14 18 17 14 11 7 4 18 11 4 3 2 6 10 13 17 16 12 9 13 16 15 8 1

$m_{49} =$	1 5 8 1 15 8 12 9 6 3 4 18 17 16 12 15 16 13 9 5 2 6 10 13 17 14 11 18 14 10 7 11 4 7 3 2 1
$m_{50} =$	1 2 6 3 4 18 11 14 17 18 14 10 7 11 4 7 3 2 5 9 13 17 16 12 9 6 10 13 16 15 12 8 5 1 8 15 1
$m_{51} =$	1 8 15 12 8 5 9 12 16 13 9 6 3 4 7 3 2 5 1 15 16 17 18 4 11 18 14 10 7 11 14 17 13 10 6 2 1
$m_{52} =$	1 2 3 7 11 14 18 4 11 18 17 13 16 17 14 10 13 9 5 1 15 12 16 15 8 12 9 6 10 7 4 3 6 2 5 8 1
$m_{53} =$	1 8 15 16 17 18 4 7 10 14 18 11 14 17 13 16 12 15 1 5 9 12 8 5 2 6 10 13 9 6 3 4 11 7 3 2 1
$m_{54} =$	1 8 12 15 16 13 10 14 17 18 11 14 18 4 7 11 4 3 7 10 6 3 2 5 1 15 8 5 9 12 16 17 13 9 6 2 1
$m_{55} =$	1 15 16 13 10 7 3 6 10 14 17 18 11 7 4 18 14 11 4 3 2 6 9 12 8 15 12 16 17 13 9 5 2 1 8 5 1
$m_{56} =$	1 5 2 3 4 11 7 10 13 17 16 15 8 12 15 1 8 5 9 12 16 13 9 6 10 14 11 18 14 17 18 4 7 3 6 2 1
$m_{57} =$	1 15 16 12 15 8 5 2 3 6 10 14 18 4 3 7 11 14 17 18 11 4 7 10 13 17 16 13 9 5 1 2 6 9 12 8 1
$m_{58} =$	1 5 2 1 8 5 9 6 3 7 4 3 2 6 10 7 11 4 18 11 14 10 13 16 12 9 13 17 18 14 17 16 15 8 12 15 1
$m_{59} =$	1 15 16 17 18 11 7 10 14 11 4 18 14 17 13 10 6 2 5 9 6 3 4 7 3 2 1 8 12 9 13 16 12 15 8 5 1

Для определения маршрутов максимального мониторинга программными средствами проводится поочередная проверка ОЗМ на возможность группового полета с интервалом в одно ребро [16, 17, 18] и поиска максимального размера группы. Всего для множества оптимальных замкнутых маршрутов (табл. 10) найдено пять уникальных маршрутов максимального мониторинга на графе **v18e36**:

- $m_{13}=(1 8 12 15 1 2 3 4 7 10 13 16 17 14 18 11 7 3 6 2 5 8 15 16 12 9 6 10 14 11 4 18 17 13 9 5 1);$
- $m_{21}=(1 8 12 9 6 2 3 4 18 11 7 10 6 3 7 4 11 14 17 16 15 1 5 9 13 17 18 14 10 13 16 12 15 8 5 2 1);$
- $m_{33}=(1 5 9 6 2 3 7 4 11 14 10 6 3 4 18 17 13 16 15 12 9 13 10 7 11 18 14 17 16 12 8 1 2 5 8 15 1);$
- $m_{38}=(1 15 16 17 14 11 4 18 14 10 13 16 12 8 5 9 6 3 7 11 18 17 13 9 12 15 8 1 2 3 4 7 10 6 2 5 1);$
- $m_{42}=(1 8 5 9 12 8 15 16 17 14 11 7 4 18 14 10 6 3 2 5 1 15 12 16 13 10 7 3 4 11 18 17 13 9 6 2 1).$

Для графа **v18e36** из проведенного исследования число четыре является числом максимального мониторинга в группе БПЛА, следующих друг за другом с интервалом одно ребро с соблюдений условий безопасности.

Возможно, что для графа **v18e36** число в группе БПЛА больше, чем четыре, так как в таблице 10 найдены не все ОЗМ данного графа. Для этого необходимо проводить дополнительные исследования.

Схема группового полета четырёх БПЛА представлена в таблице 11 для маршрута максимального мониторинга m_{13} (табл. 10).

Таб. 11. Проверка ОЗМ m_{13} на безопасный групповой мониторинг на графе **v18e36**

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	8	12	15	1	2	3	4	7	10	13	16	17	14	18	11	7	3	6	2
2		1	8	12	15	1	2	3	4	7	10	13	16	17	14	18	11	7	3	6
3			1	8	12	15	1	2	3	4	7	10	13	16	17	14	18	11	7	3
4				1	8	12	15	1	2	3	4	7	10	13	16	17	14	18	11	7
5					1	8	12	15	1	2	3	4	7	10	13	16	17	14	18	11

Из таблицы 11 следует, что на маршруте максимального мониторинга m_{13} безопасный полет возможен для четырех БПЛА. Маршрут пятого летательного аппарата по данному маршруту невозможен, т.к. он встречается с первым БПЛА в вершине с номером 1 (выделена полужирным начертанием на схеме полета) в столбцах 5 и 41 (табл. 11).

Продолжение таблицы 11

№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
1	5	8	15	16	12	9	6	10	14	11	4	18	17	13	9	5	1	8	12	15	1	2
2	3	5	8	15	16	12	9	6	10	14	11	4	18	17	13	9	5	1	8	12	15	1
3	7	3	5	8	15	16	12	9	6	10	14	11	4	18	17	13	9	5	1	8	12	15
4	11	7	3	5	8	15	16	12	9	6	10	14	11	4	18	17	13	9	5	1	8	12
5	18	11	7	3	5	8	15	16	12	9	6	10	14	11	4	18	17	13	9	5	1 	8

Граф **v18e36** обладает вертикальной и горизонтальной симметрией, поэтому существуют вертикальный и горизонтальный автоморфизмы $\gamma_{авт. гор}$ и $\gamma_{авт. вер}$, которые переставляют вершины графа:

$$\gamma_{авт. гор} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 12 & 13 & 14 & 8 & 9 & 10 & 11 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \tag{12}$$

$$\gamma_{авт. вер} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 6 & 5 & 11 & 10 & 9 & 8 & 14 & 13 & 12 & 18 & 17 & 16 & 15 \end{pmatrix}.$$

Применение автоморфизмов позволяет преобразовать МММ в новые маршруты:

$$\gamma_{авт. гор}(\mathbf{m}_{13}) = \gamma_{авт. гор}(1\ 8\ 12\ 15\ 1\ 2\ 3\ 4\ 7\ 10\ 13\ 16\ 17\ 14\ 18\ 11\ 7\ 3\ 6\ 2\ 5\ 8\ 15\ 16\ 12\ 9\ 6\ 10\ 14\ 11\ 4\ 18\ 17\ 13\ 9\ 5\ 1) = (15\ 8\ 5\ 1\ 15\ 16\ 17\ 18\ 14\ 10\ 6\ 2\ 3\ 7\ 4\ 11\ 14\ 17\ 13\ 16\ 12\ 8\ 1\ 2\ 5\ 9\ 13\ 10\ 7\ 11\ 18\ 4\ 3\ 6\ 9\ 12\ 15) = (15\ 8\ 5\ 1)(1\ 15\ 16\ 17\ 18\ 14\ 10\ 6\ 2\ 3\ 7\ 4\ 11\ 14\ 17\ 13\ 16\ 12\ 8\ 1\ 2\ 5\ 9\ 13\ 10\ 7\ 11\ 18\ 4\ 3\ 6\ 9\ 12\ 15) = (1\ 15\ 16\ 17\ 18\ 14\ 10\ 6\ 2\ 3\ 7\ 4\ 11\ 14\ 17\ 13\ 16\ 12\ 8\ 1\ 2\ 5\ 9\ 13\ 10\ 7\ 11\ 18\ 4\ 3\ 6\ 9\ 12\ 15)(15\ 8\ 5\ 1) = (1\ 15\ 16\ 17\ 18\ 14\ 10\ 6\ 2\ 3\ 7\ 4\ 11\ 14\ 17\ 13\ 16\ 12\ 8\ 1\ 2\ 5\ 9\ 13\ 10\ 7\ 11\ 18\ 4\ 3\ 6\ 9\ 12\ 15\ 8\ 5\ 1) = \mathbf{m}_{60};$$

$$\gamma_{авт. гор}(\mathbf{m}_{13}) = \gamma_{авт. гор}(1\ 8\ 12\ 15\ 1\ 2\ 3\ 4\ 7\ 10\ 13\ 16\ 17\ 14\ 18\ 11\ 7\ 3\ 6\ 2\ 5\ 8\ 15\ 16\ 12\ 9\ 6\ 10\ 14\ 11\ 4\ 18\ 17\ 13\ 9\ 5\ 1) = (4\ 11\ 14\ 18\ 4\ 3\ 2\ 1\ 5\ 9\ 13\ 17\ 16\ 12\ 15\ 8\ 5\ 2\ 6\ 3\ 7\ 11\ 18\ 17\ 14\ 10\ 6\ 9\ 12\ 8\ 1\ 15\ 16\ 13\ 10\ 7\ 4) = (4\ 11\ 14\ 18\ 4\ 3\ 2\ 1)(1\ 5\ 9\ 13\ 17\ 16\ 12\ 15\ 8\ 5\ 2\ 6\ 3\ 7\ 11\ 18\ 17\ 14\ 10\ 6\ 9\ 12\ 8\ 1\ 15\ 16\ 13\ 10\ 7\ 4) = (1\ 5\ 9\ 13\ 17\ 16\ 12\ 15\ 8\ 5\ 2\ 6\ 3\ 7\ 11\ 18\ 17\ 14\ 10\ 6\ 9\ 12\ 8\ 1\ 15\ 16\ 13\ 10\ 7\ 4)(4\ 11\ 14\ 18\ 4\ 3\ 2\ 1) = (1\ 5\ 9\ 13\ 17\ 16\ 12\ 15\ 8\ 5\ 2\ 6\ 3\ 7\ 11\ 18\ 17\ 14\ 10\ 6\ 9\ 12\ 8\ 1\ 15\ 16\ 13\ 10\ 7\ 4\ 11\ 14\ 18\ 4\ 3\ 2\ 1) = \mathbf{m}_{61} \text{ и т.д.}$$

Частота появления маршрутов максимального мониторинга среди ОЗМ, перечисленных в таблице 10, равна: $5:59 = 0,08475 \approx 8,5\%$.

6. Рассмотрим граф **v25e50**, состоящий из 25 вершин и 50 ребер, и проведем расчет маршрутов максимального группового полета (рис. 8).

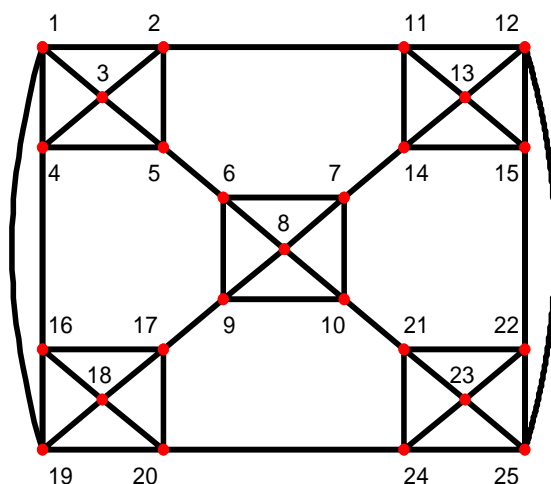


Рис. 8. Граф v_{25e50} , состоящий из 25 вершин и 50 ребер

Для графа большой размерности v_{25e50} расчет замкнутых маршрутов целесообразно проводить генетическим алгоритмом с помощью векторной целевой функции [8, 19, 20, 21]. В таблице 12 приведены ОЗМ графа v_{25e50} , рассчитанные ГА.

Таб. 12. Результаты расчета ОЗМ графа v_{25e50} с помощью векторной ЦФ

№	ОЗМ
1	$m_1 = 1\ 4\ 16\ 18\ 19\ 1\ 2\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9\ 10\ 7\ 14\ 11\ 13\ 12\ 15\ 13\ 14\ 15\ 22\ 23\ 24\ 25\ 22\ 21\ 10\ 8\ 7\ 6\ 9\ 17\ 18\ 20\ 17\ 16\ 19\ 20\ 24\ 21\ 23\ 25\ 12\ 11\ 2\ 5\ 4\ 3\ 1;$
2	$m_2 = 1\ 2\ 11\ 14\ 13\ 12\ 15\ 14\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 5\ 3\ 1\ 4\ 16\ 19\ 20\ 24\ 25\ 12\ 11\ 13\ 15\ 22\ 21\ 23\ 25\ 22\ 23\ 24\ 21\ 10\ 8\ 9\ 6\ 8\ 7\ 10\ 9\ 17\ 18\ 20\ 17\ 16\ 18\ 19\ 1;$
3	$m_3 = 1\ 2\ 3\ 1\ 19\ 16\ 18\ 20\ 19\ 18\ 17\ 20\ 24\ 21\ 23\ 22\ 25\ 23\ 24\ 25\ 12\ 15\ 14\ 11\ 12\ 13\ 11\ 2\ 5\ 4\ 16\ 17\ 9\ 10\ 8\ 7\ 14\ 13\ 15\ 22\ 21\ 10\ 7\ 6\ 9\ 8\ 6\ 5\ 3\ 4\ 1;$
4	$m_4 = 1\ 2\ 11\ 13\ 14\ 15\ 13\ 12\ 11\ 14\ 7\ 6\ 8\ 7\ 10\ 8\ 9\ 10\ 21\ 22\ 25\ 23\ 22\ 15\ 12\ 25\ 24\ 23\ 21\ 24\ 20\ 18\ 19\ 20\ 17\ 18\ 16\ 4\ 5\ 2\ 3\ 5\ 6\ 9\ 17\ 16\ 19\ 1\ 3\ 4\ 1;$
5	$m_5 = 1\ 3\ 4\ 5\ 2\ 11\ 12\ 15\ 13\ 11\ 14\ 7\ 10\ 9\ 17\ 20\ 24\ 21\ 22\ 25\ 24\ 23\ 25\ 12\ 13\ 14\ 15\ 22\ 23\ 21\ 10\ 8\ 9\ 6\ 7\ 8\ 6\ 5\ 3\ 2\ 1\ 4\ 16\ 19\ 20\ 18\ 16\ 17\ 18\ 19\ 1;$
6	$m_6 = 1\ 2\ 5\ 4\ 16\ 19\ 18\ 16\ 17\ 18\ 20\ 17\ 9\ 10\ 21\ 23\ 22\ 15\ 13\ 14\ 15\ 12\ 13\ 11\ 12\ 25\ 23\ 24\ 21\ 22\ 25\ 24\ 20\ 19\ 1\ 3\ 2\ 11\ 14\ 7\ 10\ 8\ 6\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 3\ 4\ 1;$
7	$m_7 = 1\ 3\ 2\ 11\ 13\ 14\ 11\ 12\ 13\ 15\ 22\ 23\ 24\ 20\ 18\ 17\ 9\ 10\ 21\ 24\ 25\ 23\ 21\ 22\ 25\ 12\ 15\ 14\ 7\ 10\ 8\ 9\ 6\ 7\ 8\ 6\ 5\ 3\ 4\ 1\ 19\ 16\ 17\ 20\ 19\ 18\ 16\ 4\ 5\ 2\ 1;$
8	$m_8 = 1\ 19\ 18\ 16\ 17\ 9\ 8\ 7\ 6\ 9\ 10\ 7\ 14\ 15\ 22\ 23\ 25\ 22\ 21\ 24\ 20\ 18\ 17\ 20\ 19\ 16\ 4\ 5\ 6\ 8\ 10\ 21\ 23\ 24\ 25\ 12\ 11\ 13\ 15\ 12\ 13\ 14\ 11\ 2\ 3\ 1\ 4\ 3\ 5\ 2\ 1;$
9	$m_9 = 1\ 3\ 2\ 11\ 14\ 7\ 10\ 9\ 6\ 5\ 2\ 1\ 19\ 18\ 20\ 24\ 23\ 22\ 25\ 23\ 21\ 24\ 25\ 12\ 11\ 13\ 15\ 12\ 13\ 14\ 15\ 22\ 21\ 10\ 8\ 7\ 6\ 8\ 9\ 17\ 18\ 16\ 17\ 20\ 19\ 16\ 4\ 3\ 5\ 4\ 1;$
10	$m_{10} = 1\ 2\ 11\ 14\ 13\ 11\ 12\ 13\ 15\ 22\ 23\ 21\ 10\ 7\ 8\ 9\ 6\ 8\ 10\ 9\ 17\ 18\ 16\ 17\ 20\ 19\ 1\ 3\ 5\ 6\ 7\ 14\ 15\ 12\ 25\ 23\ 24\ 25\ 22\ 21\ 24\ 20\ 18\ 19\ 16\ 4\ 5\ 2\ 3\ 4\ 1;$
11	$m_{11} = 1\ 3\ 4\ 1\ 2\ 11\ 13\ 12\ 25\ 22\ 21\ 23\ 25\ 24\ 21\ 10\ 8\ 7\ 10\ 9\ 6\ 7\ 14\ 13\ 15\ 14\ 11\ 12\ 15\ 22\ 23\ 24\ 20\ 17\ 16\ 18\ 19\ 20\ 18\ 17\ 9\ 8\ 6\ 5\ 2\ 3\ 5\ 4\ 16\ 19\ 1;$

12	$m_{12} = 1\ 3\ 4\ 16\ 17\ 20\ 18\ 17\ 9\ 10\ 7\ 8\ 9\ 6\ 7\ 14\ 11\ 12\ 15\ 14\ 13\ 15\ 22\ 21\ 23\ 25\ 22\ 23\ 24\ 21\ 10\ 8\ 6\ 5\ 2\ 3\ 5\ 4\ 1\ 2\ 11\ 13\ 12\ 25\ 24\ 20\ 19\ 18\ 16\ 19\ 1;$
13	$m_{13} = 1\ 2\ 11\ 12\ 25\ 22\ 21\ 23\ 22\ 15\ 12\ 13\ 15\ 14\ 11\ 13\ 14\ 7\ 10\ 8\ 6\ 9\ 10\ 21\ 24\ 23\ 25\ 24\ 20\ 18\ 19\ 16\ 17\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 3\ 2\ 5\ 4\ 16\ 18\ 17\ 20\ 19\ 1\ 4\ 3\ 1;$
14	$m_{14} = 1\ 2\ 3\ 1\ 4\ 3\ 5\ 4\ 16\ 19\ 20\ 18\ 17\ 20\ 24\ 21\ 22\ 23\ 25\ 12\ 11\ 2\ 5\ 6\ 9\ 10\ 8\ 7\ 10\ 21\ 23\ 24\ 25\ 22\ 15\ 12\ 13\ 11\ 14\ 15\ 13\ 14\ 7\ 6\ 8\ 9\ 17\ 16\ 18\ 19\ 1;$
15	$m_{15} = 1\ 19\ 16\ 17\ 20\ 18\ 17\ 9\ 10\ 7\ 8\ 6\ 9\ 8\ 10\ 21\ 24\ 25\ 22\ 15\ 13\ 14\ 11\ 13\ 12\ 15\ 14\ 7\ 6\ 5\ 2\ 1\ 3\ 2\ 11\ 12\ 25\ 23\ 21\ 22\ 23\ 24\ 20\ 19\ 18\ 16\ 4\ 5\ 3\ 4\ 1;$
16	$m_{16} = 1\ 4\ 3\ 1\ 19\ 16\ 18\ 20\ 19\ 18\ 17\ 20\ 24\ 25\ 22\ 21\ 24\ 23\ 25\ 12\ 15\ 13\ 14\ 7\ 10\ 9\ 6\ 7\ 8\ 9\ 17\ 16\ 4\ 5\ 3\ 2\ 5\ 6\ 8\ 10\ 21\ 23\ 22\ 15\ 14\ 11\ 12\ 13\ 11\ 2\ 1;$
17	$m_{17} = 1\ 2\ 5\ 4\ 3\ 5\ 6\ 8\ 7\ 6\ 9\ 8\ 10\ 9\ 17\ 20\ 18\ 16\ 19\ 1\ 3\ 2\ 11\ 13\ 15\ 22\ 23\ 24\ 25\ 23\ 21\ 10\ 7\ 14\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 12\ 25\ 22\ 21\ 24\ 20\ 19\ 18\ 17\ 16\ 4\ 1;$
18	$m_{18} = 1\ 4\ 5\ 3\ 4\ 16\ 19\ 20\ 18\ 17\ 20\ 24\ 23\ 21\ 22\ 25\ 24\ 21\ 10\ 8\ 7\ 6\ 8\ 9\ 17\ 16\ 18\ 19\ 1\ 2\ 5\ 6\ 9\ 10\ 7\ 14\ 13\ 15\ 12\ 11\ 14\ 15\ 22\ 23\ 25\ 12\ 13\ 11\ 2\ 3\ 1;$
19	$m_{19} = 1\ 3\ 2\ 1\ 4\ 16\ 17\ 18\ 19\ 16\ 18\ 20\ 24\ 21\ 22\ 25\ 12\ 13\ 15\ 14\ 13\ 11\ 12\ 15\ 22\ 23\ 25\ 24\ 23\ 21\ 10\ 8\ 6\ 5\ 4\ 3\ 5\ 2\ 11\ 14\ 7\ 8\ 9\ 6\ 7\ 10\ 9\ 17\ 20\ 19\ 1;$
20	$m_{20} = 1\ 4\ 16\ 19\ 20\ 17\ 9\ 8\ 6\ 9\ 10\ 8\ 7\ 6\ 5\ 3\ 2\ 11\ 14\ 15\ 12\ 25\ 22\ 15\ 13\ 12\ 11\ 13\ 14\ 7\ 10\ 21\ 22\ 23\ 25\ 24\ 23\ 21\ 24\ 20\ 18\ 17\ 16\ 18\ 19\ 1\ 2\ 5\ 4\ 3\ 1;$
21	$m_{21} = 1\ 2\ 3\ 1\ 19\ 18\ 20\ 19\ 16\ 17\ 20\ 24\ 23\ 21\ 22\ 25\ 24\ 21\ 10\ 7\ 6\ 8\ 9\ 6\ 5\ 3\ 4\ 5\ 2\ 11\ 14\ 13\ 15\ 22\ 23\ 25\ 12\ 13\ 11\ 12\ 15\ 14\ 7\ 8\ 10\ 9\ 17\ 18\ 16\ 4\ 1;$
22	$m_{22} = 1\ 2\ 5\ 4\ 3\ 5\ 6\ 9\ 8\ 6\ 7\ 10\ 8\ 7\ 14\ 15\ 12\ 13\ 15\ 22\ 23\ 25\ 22\ 21\ 10\ 9\ 17\ 18\ 19\ 20\ 17\ 16\ 18\ 20\ 24\ 21\ 23\ 24\ 25\ 12\ 11\ 13\ 14\ 11\ 2\ 3\ 1\ 19\ 16\ 4\ 1;$
23	$m_{23} = 1\ 3\ 5\ 4\ 16\ 19\ 18\ 17\ 9\ 6\ 7\ 14\ 13\ 11\ 14\ 15\ 12\ 11\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ 5\ 6\ 8\ 10\ 7\ 8\ 9\ 10\ 21\ 22\ 23\ 24\ 21\ 23\ 25\ 12\ 13\ 15\ 22\ 25\ 24\ 20\ 17\ 16\ 18\ 20\ 19\ 1;$
24	$m_{24} = 1\ 3\ 4\ 16\ 18\ 19\ 20\ 17\ 16\ 19\ 1\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ 10\ 7\ 6\ 9\ 17\ 18\ 20\ 24\ 21\ 10\ 8\ 7\ 14\ 11\ 13\ 12\ 25\ 24\ 23\ 22\ 25\ 23\ 21\ 22\ 15\ 13\ 14\ 15\ 12\ 11\ 2\ 3\ 5\ 2\ 1;$
25	$m_{25} = 1\ 19\ 16\ 17\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 2\ 3\ 5\ 4\ 1\ 3\ 4\ 16\ 18\ 19\ 20\ 18\ 17\ 20\ 24\ 25\ 12\ 13\ 15\ 22\ 21\ 24\ 23\ 25\ 22\ 23\ 21\ 10\ 9\ 6\ 8\ 10\ 7\ 14\ 13\ 11\ 14\ 15\ 12\ 11\ 2\ 1;$
26	$m_{26} = 1\ 4\ 5\ 2\ 3\ 5\ 6\ 7\ 10\ 21\ 22\ 15\ 13\ 12\ 11\ 2\ 1\ 19\ 20\ 18\ 16\ 19\ 18\ 17\ 9\ 10\ 8\ 9\ 6\ 8\ 7\ 14\ 13\ 11\ 14\ 15\ 12\ 25\ 22\ 23\ 24\ 25\ 23\ 21\ 24\ 20\ 17\ 16\ 4\ 3\ 1;$
27	$m_{27} = 1\ 2\ 3\ 4\ 16\ 19\ 20\ 24\ 21\ 23\ 22\ 25\ 23\ 24\ 25\ 12\ 15\ 13\ 11\ 12\ 13\ 14\ 11\ 2\ 5\ 3\ 1\ 4\ 5\ 6\ 8\ 10\ 21\ 22\ 15\ 14\ 7\ 8\ 9\ 6\ 7\ 10\ 9\ 17\ 16\ 18\ 20\ 17\ 18\ 19\ 1;$
28	$m_{28} = 1\ 4\ 5\ 3\ 4\ 16\ 17\ 20\ 18\ 16\ 19\ 18\ 17\ 9\ 8\ 10\ 7\ 8\ 6\ 5\ 2\ 3\ 1\ 2\ 11\ 13\ 15\ 12\ 25\ 23\ 22\ 15\ 14\ 11\ 12\ 13\ 14\ 7\ 6\ 9\ 10\ 21\ 24\ 25\ 22\ 21\ 23\ 24\ 20\ 19\ 1;$
29	$m_{29} = 1\ 19\ 16\ 17\ 9\ 8\ 6\ 9\ 10\ 7\ 8\ 10\ 21\ 22\ 25\ 12\ 13\ 14\ 7\ 6\ 5\ 2\ 11\ 12\ 15\ 13\ 11\ 14\ 15\ 22\ 23\ 25\ 24\ 23\ 21\ 24\ 20\ 18\ 17\ 20\ 19\ 18\ 16\ 4\ 5\ 3\ 2\ 1\ 3\ 4\ 1;$
30	$m_{30} = 1\ 2\ 11\ 12\ 15\ 22\ 21\ 10\ 8\ 7\ 6\ 5\ 3\ 2\ 5\ 4\ 1\ 3\ 4\ 16\ 17\ 18\ 16\ 19\ 20\ 17\ 9\ 6\ 8\ 9\ 10\ 7\ 14\ 11\ 13\ 14\ 15\ 13\ 12\ 25\ 22\ 23\ 25\ 24\ 23\ 21\ 24\ 20\ 18\ 19\ 1;$
31	$m_{31} = 1\ 3\ 5\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8\ 10\ 7\ 8\ 9\ 6\ 7\ 14\ 11\ 2\ 1\ 4\ 16\ 19\ 20\ 18\ 17\ 20\ 24\ 25\ 22\ 23\ 21\ 22\ 15\ 13\ 12\ 15\ 14\ 13\ 11\ 12\ 25\ 23\ 24\ 21\ 10\ 9\ 17\ 16\ 18\ 19\ 1;$
32	$m_{32} = 1\ 4\ 3\ 5\ 6\ 9\ 8\ 10\ 9\ 17\ 20\ 24\ 25\ 12\ 15\ 13\ 12\ 11\ 14\ 7\ 6\ 8\ 7\ 10\ 21\ 22\ 25\ 23\ 24\ 21\ 23\ 22\ 15\ 14\ 13\ 11\ 2\ 1\ 3\ 2\ 5\ 4\ 16\ 17\ 18\ 20\ 19\ 16\ 18\ 19\ 1;$
33	$m_{33} = 1\ 3\ 2\ 1\ 19\ 20\ 24\ 25\ 22\ 23\ 24\ 21\ 10\ 8\ 9\ 10\ 7\ 6\ 5\ 2\ 11\ 12\ 13\ 11\ 14\ 13\ 15\ 22\ 21\ 23\ 25\ 12\ 15\ 14\ 7\ 8\ 6\ 9\ 17\ 16\ 18\ 20\ 17\ 18\ 19\ 16\ 4\ 3\ 5\ 4\ 1;$

34	$m_{34} = 1\ 4\ 5\ 6\ 9\ 10\ 7\ 14\ 11\ 12\ 15\ 14\ 13\ 12\ 25\ 22\ 21\ 10\ 8\ 6\ 7\ 8\ 9\ 17\ 16\ 4$ $3\ 1\ 19\ 18\ 20\ 19\ 16\ 18\ 17\ 20\ 24\ 25\ 23\ 21\ 24\ 23\ 22\ 15\ 13\ 11\ 2\ 5\ 3\ 2\ 1$
----	--

Определение МММ проводится программными средствами.

Аналогично предыдущим графам, на множестве ОЗМ графа **v25e50** действуют операторы обращения $\gamma_{обр}$ и разрезания $\gamma_{раз,1}$ в промежуточной вершине с номером 1, автоморфизмы вертикальной $\gamma_{авт.вер}$ и горизонтальной симметрии $\gamma_{авт.гор}$, которые переставляют вершины в маршрутах и размножают ОЗМ из таблицы 10. При этом МММ при размножении дают опять МММ с тем же числом безопасного полета БПЛА. Это следует из факта перестановок вершин при действии операторов $\gamma_{обр}$, $\gamma_{раз,1}$, $\gamma_{авт.вер}$, $\gamma_{авт.гор}$ с сохранением расстояния между одинаковыми номерами вершин [22, 23, 24].

$$\gamma_{авт.гор} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 19 & 20 & 18 & 16 & 17 & 9 & 10 & 8 & 6 & 7 & 24 & 25 & 23 & 21 & 22 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 & 14 & 15 & 13 & 11 & 12 \end{pmatrix}; \tag{13}$$

$$\gamma_{авт.вер} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 12 & 11 & 13 & 15 & 14 & 7 & 6 & 8 & 10 & 9 & 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 22 & 21 & 23 & 25 & 24 & 17 & 16 & 18 & 20 & 19 \end{pmatrix}.$$

Применение автоморфизмов порождает новые маршруты, которые объединяются с исходными, образуя большее множество ОЗМ, над которым может быть проведена проверка по методике определения маршрута максимального мониторинга на графе программными средствами.

Методика отыскания маршрута максимального мониторинга повторяет построение схемы полета по одному и тому же оптимальному замкнутому маршруту друг за другом с интервалом в одно ребро. Данная схема полета для ОЗМ **m₁** представлена в таблице 13.

Таб. 13. Проверка ОЗМ **m₁** на безопасный групповой мониторинг на графе **v25e50**

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	1	4	16	18	19	1	2	3	5	6	8	9	10	7	14	11	13	12	15	13	14	15	22	23	24
2		1	4	16	18	19	1	2	3	5	6	8	9	10	7	14	11	13	12	15	13	14	15	22	23
3			1	4	16	18	19	1	2	3	5	6	8	9	10	7	14	11	13	12	15	13	14	15	22
4				1	4	16	18	19	1	2	3	5	6	8	9	10	7	14	11	13	12	15	13	14	15

Таблица 13 показывает, что по МММ **m₁** может быть организован полет трех БПЛА с интервалом одно ребро. Четвертый БПЛА будет встречаться с другими БПЛА в вершинах, выделенными полужирным начертанием.

Особенность графа **v25e50** состоит в том, что программная проверка по алгоритму поиска маршрутов максимального мониторинга среди всех ОЗМ из таблицы 13 показывает, что для всех маршрутов значение *count* является постоянным и равно трем. Это наводит на мысль, что

все ОЗМ, которые можно рассчитать, например, с помощью ГА, на графе $v25e50$ совпадают: $MMM = MNM = O3M$, но это требует своего доказательства.

Продолжение таблицы 13

№	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
1	25	22	21	10	8	7	6	9	17	18	20	17	16	19	20	24	21	23	25	12	11	2	5	4	3	1	4
2	24	25	22	21	10	8	7	6	9	17	18	20	17	16	19	20	24	21	23	25	12	11	2	5	4	3	1
3	23	24	25	22	21	10	8	7	6	9	17	18	20	17	16	19	20	24	21	23	25	12	11	2	5	4	3
4	22	23	24	25	22	21	10	8	7	6	9	17	18	20	17	16	19	20	24	21	23	25	12	11	2	5	4

Это можно было бы легко доказать, если бы можно было найти все ОЗМ графа $v25e50$. Сделать это можно, например, методом перебора, но для это потребуется время —недели, месяцы или годы, — оценивание которого в данной статье не проводится [25, 26].

Вероятность MMM среди ОЗМ для данного графа составляет 100%.

На основании проведенных исследований [28] на различных графах можно сформулировать следующие определения, теоремы и следствия из них, в основе которых находятся положения теории графов справедливые для эйлеровых и гамильтоновых графах с конечным числом ребер и вершин о конечности множеств эйлеровых и гамильтоновых графов.

Определение 1. Пусть M — множество замкнутых эйлеровых маршрутов на эйлеровом или замкнутых гамильтоновых маршрутов на гамильтоновом графе, то маршрут $m \in M$ называется маршрутом максимального мониторинга, если по нему может перемещаться максимальное число аппаратов в группе с интервалом в одно ребро друг за другом. Это количество аппаратов в группе называется числом максимального мониторинга для множества M и зависит от рассматриваемого подмножества ОЗМ.

Определение 2. Пусть M — полное множество эйлеровых или гамильтоновых маршрутов на эйлеровом или гамильтоновом графе, то маршрут $m \in M$ называется маршрутом наибольшего мониторинга, если по нему может перемещаться наибольшее количество аппаратов в группе с интервалом в одно ребро друг за другом, которое называется числом наибольшего мониторинга и значение которого является константой для рассматриваемого графа G .

Рассмотрение примеров расчета MMM на графах $v6e10$, $v8e12$, $v8e16$, $v15e28$, $v18e36$, $v25e50$ приводит к справедливости следующих теорем.

Теорема 1 (о замкнутости множества эйлеровых маршрутов при действии на них операторов обращения $\gamma_{обр}$, разрезания $\gamma_{раз,n}$ в промежуточной вершине с номером n и автоморфизмов $\gamma_{авт}$ графа).

Преобразование любого множества эйлеровых маршрутов на графе с помощью операторов обращения $\gamma_{обр}$, разрезания $\gamma_{раз,n}$ в промежуточной вершине и автоморфизмов $\gamma_{авт}$ графа переводит их в эйлеровы маршруты.

Доказательство. Пусть m является эйлеровым маршрутом из некоторого множества M эйлеровых маршрутов эйлера графа G , тогда m , как набор номеров вершин $m = (v_1, v_2, \dots, v_{n+1})$, удовлетворяет целевой функции эйлера графа: $Z(m) = Z(v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n) = 0$.

1. Подействуем на эйлеров маршрут \mathbf{m} оператором обращения $\gamma_{обр}$. Получим $\gamma_{обр}(\mathbf{m}) = (v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_2, v_1)$. Так как целевая функция эйлера графа может быть записана в аддитивной или мультипликативной форме (14):

$$Z_E(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{\#E} cod_E(v_i, v_{i+1}) - A_E = 0 \text{ или} \tag{14}$$

$$Z_E(\mathbf{m}) = \prod_{i=1}^{\#E} cod_E(v_i, v_{i+1}) - M_E = 0,$$

где E — множество ребер, $cod_E(v_i, v_{i+1})$ — коды ребер графа, которые являются величинами однозначного разложения. Для аддитивного варианта ЦФ (верхняя строка (14)) $cod_E(v_i, v_{i+1})$ являются слагаемыми его однозначного разложения. Например, если A_E — векторная величина, то коды ребер $cod_E(v_i, v_{i+1})$ — векторы, а ЦФ является векторной аддитивной функцией [5, 6]. Для мультипликативного варианта (нижняя форма ЦФ (14)) коды ребер являются образующими мультипликативных групп. Таким образом, A_E и M_E — соответственно, сумма аддитивных и произведение мультипликативных кодов всех ребер графа. Слагаемые и множители ЦФ (14), в силу коммутативности сложения и умножения не зависят от порядка следования ребер графа в сумме или произведении кодов. Поэтому, если ЦФ на маршруте \mathbf{m} равна нулю, то и на $\gamma_{обр}(\mathbf{m})$ она равна нулю. Следовательно, $\gamma_{обр}(\mathbf{m})$ — эйлеров маршрут.

2. Подействуем на эйлеров маршрут $\mathbf{m} = (1, v_2, \dots, v_r, 1, v_{r+2}, \dots, v_{n-1}, 1)$, который имеет внутри вершину с номером 1, оператором разрезания $\gamma_{раз,1}$. Получим $\gamma_{раз,1}(\mathbf{m}) = \gamma_{раз,1}(1, v_2, \dots, v_r, 1, v_{r+2}, \dots, v_{n-1}, 1) = (1, v_2, \dots, v_r, 1)(1, v_{r+2}, \dots, v_{n-1}, 1) = (1, v_{r+2}, \dots, v_{n-1}, 1, v_2, \dots, v_r, 1)$. Новый набор номеров вершин графа $\gamma_{раз,1}(\mathbf{m})$, состоит из тех же ребер, что и \mathbf{m} и поэтому на $\gamma_{раз,1}(\mathbf{m})$ ЦФ (14) будет равна нулю. Следовательно, $\gamma_{раз,1}(\mathbf{m})$ — эйлеров маршрут. Т.к. в графе любая вершина может быть занумерована числом 1, то обозначение конечной точки маршрута единицей не влияет на доказательство.

3. Подействуем на эйлеров маршрут $\mathbf{m} = (v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_{n-1}, v_n)$ графа Γ автоморфизмом $\gamma_{авт}(\mathbf{m})$. Автоморфизм при действии на маршрут \mathbf{m} действует на вершины, которые, например, перенумерованы натуральными числами от 1 до $\#V$, где $\#V$ — число всех вершин, переставляя их номера, как перестановка.

Важной особенностью определения автоморфизма является то, что множества вершин у автоморфных графов одинаковы и для них сохраняется отношение смежности: если (v_i, v_j) — ребро в Γ , то и $(\gamma_{авт}(v_i), \gamma_{авт}(v_j))$ — ребро в Γ . Автоморфизмы графа образуют группу и у каждого автоморфизма есть обратный¹. Автоморфизм переводит ребра (v_i, v_j) графа Γ в пару $(\gamma_{авт}(v_i), \gamma_{авт}(v_j))$, которые тоже являются ребрами на графе Γ . Следовательно, $\gamma_{авт}(\mathbf{m})$ состоит из ребер графа и образует маршрут.

Если предположить, что какое-то ребро графа Γ отсутствует в маршруте $\gamma_{авт}(\mathbf{m}) = \gamma_{авт}(v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_{n-1}, v_n) = (\gamma_{авт}(v_1), \gamma_{авт}(v_2), \dots, \gamma_{авт}(v_r), \gamma_{авт}(v_{r+1}), \dots, \gamma_{авт}(v_{n-1}), \gamma_{авт}(v_n))$, а число их одинаково в обоих маршрутах, то для какого-то ребра увеличилась его кратность $(\gamma_{авт}(v_r), \gamma_{авт}(v_{r+1})) = (\gamma_{авт}(v_s), \gamma_{авт}(v_{s+1}))$. Применяя обратный автоморфизм, получим, что ребра равны: $(v_r, v_{r+1}) = (v_s, v_{s+1})$, т.е. увеличилась кратность ребра в графе, что противоречит

¹ Омельченко А.В. Теория графов. М.: МЦНМО, 2018. 416 с.

определению автоморфизма графа, который сохраняет смежность вершин. Таким образом, любой автоморфизм графа Γ взаимно однозначно переводит множество ребер графа в ребра этого же графа с учетом кратности в Γ . Поэтому в маршрутах \mathbf{m} и $\gamma_{\text{авт}}(\mathbf{m})$ число ребер одно и тоже и ЦФ (14) на маршруте $\gamma_{\text{авт}}(\mathbf{m})$ равна нулю. Следовательно, $\gamma_{\text{авт}}(\mathbf{m})$ — эйлеров маршрут на графе Γ . Теорема доказана.

Теорема 2 (о замкнутости множества маршрутов максимального мониторинга эйлера графа при действии на них операторов обращения $\gamma_{\text{обр}}$, разрезания $\gamma_{\text{раз},n}$ в промежуточной вершине и автоморфизмов $\gamma_{\text{авт}}$ графа).

Преобразование любого множества маршрутов максимального мониторинга эйлера графа с помощью операторов обращения $\gamma_{\text{обр}}$, разрезания $\gamma_{\text{раз},n}$ в промежуточной вершине и автоморфизмов $\gamma_{\text{авт}}$ графа переводится в множество маршрутов максимального мониторинга эйлера графа. При этом число максимального мониторинга не меняется и является инвариантом.

Доказательство. Согласно теореме 1, операторы обращения $\gamma_{\text{обр}}$, разрезания $\gamma_{\text{раз},n}$ в промежуточной вершине и автоморфизмы $\gamma_{\text{авт}}$ графа Γ переводят эйлеровы маршруты в эйлеровы маршруты на графе Γ . Пусть \mathbf{m} является маршрутом максимального мониторинга для некоторого множества M эйлеровых маршрутов эйлера графа Γ , тогда $\mathbf{m} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, а k — число максимального мониторинга. Т.е. в маршруте \mathbf{m} существует пара одинаковых вершин v_i и v_j , между которыми число ребер равно $k = j - i$: $\mathbf{m} = (v_1, v_2, \dots, v_i, v_i + 1, \dots, v_{i+k} = j, \dots, v_n)$. Причем, для всех одинаковых пар вершин $v_r = v_s$, ($s > r$) маршрута \mathbf{m} имеем $k \leq \min(s - r)$ и (v_i, v_j) — пара, на которой достигается этот минимум.

1. Если на маршрут \mathbf{m} действует оператор обращения $\gamma_{\text{обр}}$, то маршрут \mathbf{m} переходит в маршрут $\gamma_{\text{обр}}(\mathbf{m})$, в котором порядок вершин поменялся на противоположный: $\gamma_{\text{обр}}(\mathbf{m}) = (v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_j, v_{j-1}, v_{j-2}, \dots, v_{j-k} = i, \dots, v_1)$, т.е. вершины расположены в обратном порядке, но расстояние между ними, равное числу ребер, сохраняется неизменным и равно $k = j - (j - k)$. Если в маршруте $\gamma_{\text{обр}}(\mathbf{m})$ число минимума расстояния между одинаковыми номерами вершин изменилось: например, $k' = \min(s' - r') < k$, то в маршруте $\gamma_{\text{обр}}(\mathbf{m})$ имеется пара одинаковых вершин $v_{r'}$, $v_{s'}$, которая при обращении $\gamma_{\text{обр}}(\gamma_{\text{обр}}(\mathbf{m})) = \mathbf{m}$ сохраняет расстояние, что противоречит тому, что $k = \min(s - r)$ между любыми парами с одинаковыми номерами вершин.

2. Рассмотрим влияние оператора разрезания маршрута в промежуточной точке с номером 1 на получение нового маршрута:

а) пусть на замкнутый маршрут $\mathbf{m} = (1, v_2, \dots, 1, \dots, v_{n-1}, 1)$ действует оператор разрезания $\gamma_{\text{раз},1}$, тогда имеем перестановку блоков, ограниченных единицами: $\gamma_{\text{раз},1}(\mathbf{m}) = (1, \dots, v_{n-1}, 1, v_2, \dots, 1)$. Если минимум расстояния k между вершинами с одинаковыми номерами $v_r = v_s$, ($s > r$) достигается между вершинами, расположенными либо в блоке $(1, v_{r+2}, \dots, 1)$, либо в блоке $(1, v_2, \dots, v_r, 1)$, то в маршруте $\gamma_{\text{раз},1}(\mathbf{m}) = (1, \dots, v_{n-1}, 1, v_2, \dots, 1)$ минимум расстояния k' не больше k . Если $k' < k$, применяем к маршруту $\gamma_{\text{раз},1}(\mathbf{m})$ оператор разрезания повторно $\gamma_{\text{раз},1}$, то получим исходный маршрут $\gamma_{\text{раз},1}(\gamma_{\text{раз},1}(\mathbf{m})) = \mathbf{m}$, в котором достигается $\min(s - r) = k$ и поэтому $k \leq k'$. Это противоречит предположению $k' < k$. Поэтому $k' = k$, то есть, в этом случае сохраняется минимальное число ребер между одинаковыми вершинами.

б) пусть $k = \min(s - r)$ достигается на вершинах маршрута с одинаковыми номерами, равными $1 = v_r = v_s$, и $\mathbf{m} = (1, v_2, \dots, v_{r-1}, 1 = v_r, v_{r+1}, \dots, v_{s-1}, 1 = v_s)$. Отсюда следует, что минимальное число ребер между v_r и v_s измеряется в левом блоке $(1 = v_r, v_{r+1}, \dots, v_{s-1}, 1 = v_s)$. Применив оператор разрезания, получим маршрут $\gamma_{\text{раз},1}(\mathbf{m}) = (1 = v_r, v_{r+1}, \dots, v_{s-1}, 1 = v_s, v_2,$

..., v_{r-1} , $1 = v_r$), в котором правый и левый блок, ограниченные единицами, поменялись местами и поэтому число ребер между вершинами v_r и v_s сохраняется и равно k . Таким образом, минимальное число ребер между вершинами с номерами, равными 1, сохраняется.

в) рассмотрим случай, когда вершины v_s и v_r находятся в разных блоках маршрута, ограниченных единицами. Пусть $k = \min(s - r)$ достигается на вершинах ОЗМ с одинаковыми номерами, равными $v_r = v_s$ в маршруте $\mathbf{m} = (1, v_2, \dots, v_r, \dots, 1, \dots, v_s, \dots, v_{n-1}, 1)$. Отсюда следует, что k — это число ребер между вершинами: v_s и v_r .

При разрезании оптимального замкнутого маршрута в вершине с номером 1 оператором $\gamma_{\text{раз}, 1}$ имеем $\gamma_{\text{раз}, 1}(\mathbf{m}) = (1, \dots, v_s, \dots, v_{n-1}, 1, v_2, \dots, v_r, \dots, 1)$. Вершины v_s и v_r оказались в разных блоках и расстояние между этими вершинами будет по-прежнему равно $k = \min(p - s)$ ребер. Действительно, в ОЗМ $\gamma_{\text{раз}, 1}(\mathbf{m}) = (\mathbf{1}, \dots, v_s, \dots, v_{n-1}, 1, v_2, \dots, v_r, \dots, \mathbf{1})$ между вершинами v_r и v_s число ребер можно подсчитать *через концевые вершины 1*, которые выделены полужирным начертанием шрифта, при счете ребер слева направо: **$v_s, \dots, \mathbf{1}, \dots, v_r$** , что совпадает с исходным числом ребер.

Поэтому при всех возможных случаях оператор $\gamma_{\text{раз}, 1}$ не меняет *число маршрута максимального мониторинга (размер группы)*, а, следовательно, переводит маршруты максимального мониторинга друг в друга, сохраняя постоянным число k .

3. Рассмотрим действие *автоморфизма* графа $\gamma_{\text{авт}}$ на маршрут максимального мониторинга $\mathbf{m} = (1, v_2, \dots, v_s, \dots, v_r, 1, v_{r+2}, \dots, v_p, \dots, v_{n-1}, 1)$ с числом $k = \min(p - s)$. Автоморфизм графа, применяемый к маршруту \mathbf{m} , действует на вершины, переставляя их номера как перестановка, образуя подгруппу перестановок вершин. У каждого автоморфизма есть обратный. При этом одинаковые вершины v_p и v_s перейдут в одинаковые вершины $\gamma_{\text{авт}}(v_p) = \gamma_{\text{авт}}(v_s)$, которые удалены на k ребер друг от друга и между ними не может быть других равных им вершин, так как при обратном автоморфизме $\gamma_{\text{авт}}^{-1}$ между v_p и v_s существовала бы равная им вершина $v_u = v_p = v_s$ и число k не является минимальным числом ребер в маршруте между вершинами с одинаковыми номерами: $k = \min(p - s) > \min(u - p, s - u) = k$, что противоречит определению числа k .

Таким образом, любой автоморфизм переводит маршруты максимального мониторинга друг в друга, сохраняя постоянным число k . Принятие вершины 1 за концевую точку в эйлеровых маршрутах не влияет на доказательство, т.к. в графе любая вершина может быть занумерована числом 1. Таким образом, теорема доказана.

Так как маршрут наибольшего мониторинга является маршрутом максимального мониторинга, то на МНМ распространяется выводы теоремы 2.

Следствие 1 из теоремы 2. Операторы обращения $\gamma_{\text{обр}}$, разрезания $\gamma_{\text{раз}, 1}$ в промежуточной вершине и автоморфизмов $\gamma_{\text{авт}}$ графа переводят маршруты наибольшего мониторинга в маршруты наибольшего мониторинга с сохранением числа наибольшего мониторинга, которое является инвариантом относительно этих операторов.

Если рассматривать гамильтоновы графы, на которых существуют замкнутые маршруты, проходящие один раз через каждую вершину, то опираясь на теоремы 1 и 2 и следствие 1, можно отметить следующее: на всех гамильтоновых маршрутах возможно движение наибольшего числа БПЛА с интервалом одно ребро, равного числу вершин графа. Поэтому все гамильтоновы маршруты являются маршрутами наибольшего мониторинга. Если рассматривать действие операторов обращения $\gamma_{\text{обр}}$, разрезания $\gamma_{\text{раз}, 1}$ в промежуточной вершине и автоморфизмов $\gamma_{\text{авт}}$ графа на гамильтоновы маршруты, то можно сформулировать теорему 3.

Теорема 3. (о замкнутости множества гамильтоновых маршрутов гамильтонова графа при действии на них операторов обращения $\gamma_{обр}$, разрезания $\gamma_{раз,1}$ в промежуточной вершине и автоморфизмов $\gamma_{авт}$ графа). Операторы обращения $\gamma_{обр}$, разрезания $\gamma_{раз,1}$ в промежуточной вершине и автоморфизма $\gamma_{авт}$ переводят гамильтоновы маршруты в гамильтоновы.

Доказательство следует из свойства гамильтоновых маршрутов, которые содержат все вершины графа без повторений, а все перечисленные операторы являются перестановками вершин с сохранением матрицы смежности.

Оператор обращения маршрута $\gamma_{обр}$ переставляет вершины маршрута в обратном порядке. Оператор разрезания $\gamma_{раз}$ в промежуточной вершине v_s делит замкнутый маршрут $\mathbf{m} = (v_1, v_2, \dots, v_s, \dots, v_{n-1}, 1)$ на два блока (v_1, v_2, \dots, v_s) , $(v_s, \dots, v_{n-1}, v_1)$ и переставляет их местами $(v_s, \dots, v_{n-1}, v_1)$, (v_1, v_2, \dots, v_s) , затем склеивает их в вершине v_1 : $(v_s, \dots, v_{n-1}, v_1, v_2, \dots, v_s)$, получая перестановку вершин, которая является исходным замкнутым маршрутом \mathbf{m} с начальной вершиной v_s . Операторы автоморфизмов $\gamma_{авт}$ графа по определению на вершинах графа переставляет вершины с сохранением матрицы смежности, то есть переводит гамильтонов маршрут в другой гамильтонов маршрут.

Так как каждый гамильтонов маршрут является МНМ, то операторы $\gamma_{обр}$, $\gamma_{раз}$, $\gamma_{авт}$ переводят МНМ в МНМ, оставляя неизменным число БПЛА на них.

Заключение

1. Поиск МММ, МНМ и максимального числа БПЛА в группе для одновременного безопасного движения в группе с интервалом в одно ребро имеет важное прикладное значение, т.к. позволяет обеспечить плотный мониторинг территории по реперам, образующим математический граф.

2. Для того, чтобы обнаружить маршрут с наибольшим количеством аппаратов, необходимо подсчитать все ОЗМ или получить достаточно большое множество ОЗМ.

3. Нахождение маршрута максимального мониторинга с наибольшим количеством БПЛА может быть осуществлено программными средствами из любого конечного числа ОЗМ, насчитанных с помощью вызова генетического алгоритма в счетном цикле.

4. Маршруты наибольшего мониторинга для больших графов не могут быть рассчитаны на современных компьютерах из-за недостаточного их быстродействия.

5. Множество ОЗМ, МММ и МНМ можно размножить, используя такие свойства графа как симметрию и операторы автоморфизма, инверсии и разрезания в промежуточных точках.

6. На множестве размноженных маршрутов максимального мониторинга или маршрутов наибольшего мониторинга число БПЛА, совершающих безопасный полет с интервалом в одно ребро друг за другом, не меняется и является инвариантом.

7. На гамильтоновом графе все гамильтоновы маршруты являются маршрутами наибольшего мониторинга, их множество замкнуто относительно операторов обращения $\gamma_{обр}$, разрезания $\gamma_{раз}$ в промежуточной вершине, автоморфизмов $\gamma_{авт}$ графа, а число наибольшего маршрута мониторинга, равное числу вершин графа, является их инвариантом [2].

Литература

1. Руденко Э.М., Аллилуева Н.В., Семикина Е.В. Маршрутизация на графе, теоретико-числовые целевые функции и генетический алгоритм // Научно-технические исследования в космических исследованиях Земли. 2019. № 6. С. 4–14.

2. *Bing Han, Tengting Qu, Xiaochong Tong, Jie Jiang, Sisi Zlatanova, Haipeng Wang, Chengqi Cheng.* Grid-optimized UAV indoor path planning algorithms in a complex environment // *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation* Vol. 111, July 2022, Article 102857. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jag.2022.102857>
3. *Дараган А.Д., Руденко Э.М., Залогин В.С., Ефремов А.А., Финогенов М.А.* Системы искусственного интеллекта. Монография. Том 2. Серпухов: ФВА РВСН им. Петра Великого, 2021. 228 с.
4. *Аллилуева Н.В., Руденко Э.М.* Математический метод расчета целевой функции на графах и решение задачи маршрутизации // *Электронный журнал «Труды МАИ»*. 2017. № 96. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=85773> (дата обращения 28.06.2022)
5. *Руденко Э.М., Семикина Е.В.* Маршрутизация беспилотных летательных аппаратов, трансцендентные целевые функции графа и генетический алгоритм // *Наукоемкие технологии в космических исследованиях Земли*. 2021. Т. 13. № 1. С. 6–16.
6. *Лебедев Г.Н., Малыгин В.Б.* Оценка возможности применения генетического алгоритма для оптимизации операций в аэропортах на основе принципов совместного принятия решений. // *Научный вестник МГТУ ГА*. 2019. Т. 22. №5. С. 85–93. URL: <https://doi.org/10.26467/2079-0619-2019-22-5-85-93> (дата обращения 12.05.2022)
7. *Руденко Э.М., Семикина Е.В.* Интеллектуальный мониторинг группы БПЛА на эйлеро-гамильтоновых графах реперов на местности // *Научно-технический журнал «Известия ИИФ»*. 2021. №4 (62). С.75–80.
8. *Руденко Э.М., Семикина Е.В.* Методика построения векторной целевой функции расчёта маршрутов на графах генетическим алгоритмом // *Научно-технический журнал «Известия ИИФ»*. 2022. №1 (63). С.93–97.
9. *Гончаренко В.И., Лебедев Г.Н., Михайлин Д.А.* Задача оперативной двумерной маршрутизации группового полета беспилотных летательных аппаратов // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2019. № 1. С. 153–165.
10. *Sabino S., Horta N., Grilo A.* Centralized unmanned aerial vehicle mesh network placement scheme: A multi-objective evolutionary algorithm approach. // *Sensors*. 2018. Vol. 18. No. 12. <https://doi.org/10.3390/s18124387>
11. *Agatz N., Bouman P., Schmidt M.* Optimization approaches for the traveling salesman problem with drone. // *Transp. Sci.* 2018. Vol. 52. No. 4. Pp. 965–981. <https://doi.org/10.1287/trsc.2017.0791>
12. *Shuai Zhang, Siliang Liu, Weibo Xu, Wanru Wang.* A novel multi-objective optimization model for the vehicle routing problem with drone delivery and dynamic flight endurance. // *Computers & Industrial Engineering*. 2022. Vol. 173. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108679>
13. *Adam J. Sobey, Przemyslaw Grudniewski.* Re-inspiring the genetic algorithm with multi-level selection theory: Multi-Level Selection Genetic Algorithm (MLSGA) // *Bioinspiration & Biomimetics*. 2018. Vol. 13. No. 5. DOI:10.1088/1748-3190/aad2e8 (дата обращения: 02.07.2022).
14. *Harshavardhan P.K., Kousik Krishnan.* Hierarchical Genetic Algorithms with evolving objective functions // *arXiv.org*. 05 Aug 2019. URL: <https://arxiv.org/pdf/1812.10308.pdf> (дата обращения: 09.07.2022).
15. *Xin J., Zhong J., Yang F., Cu, Y., Sheng J.* An Improved Genetic Algorithm for Path-Planning of Unmanned Surface Vehicle. // *Sensors* 2019. Vol. 19. No. 11. <https://doi.org/10.3390/s19112640>
16. *Карнов В.Э.* От роевой робототехники к социуму роботов. // *Материалы Всероссийской научно-технической конференции «Искусственный интеллект: проблемы и пути решения – 2018»* (Кубинка, 14–15 марта 2018), Кубинка, 2018. С.122–130. URL: http://raai.org/library/books/Konf_II_problem-2018/book1_intellect.pdf
17. *Лебедев Г.Н., Михайлин Д.А.* Автоматизированная система планирования групповых действий беспилотников при заданном графике обслуживания мобильных наземных объектов в прогнозируемой динамической обстановке. // *Сборник научных статей по материалам VI Международной научно-практической конференции «АВИАТОР»* (Воронеж, 14–15 февраля 2019), Воронеж, 2019. URL: https://vva.mil.ru/upload/site21/document_file/JG8GpML43d.pdf
18. *Khanra A., Pal T., Maiti M.K., Maiti M.* Multi-objective four-dimensional imprecise TSP solved with a hybrid multi-objective ant colony optimization-genetic algorithm with diversity. // *J. Intell. Fuzzy Syst.* 2019. Vol. 36. No. 1. Pp. 47–65. DOI: 10.3233/JIFS-172127
19. *Bence Keresztury.* Genetic algorithms and the Traveling Salesman Problem. Budapest. ELTE, Department of Operations Research. 2017. p. 56. URL: https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_alkmat/2017/keresztury_bence.pdf

20. *Patchara Kitjacharoenchai, Mario Ventresca, Mohammad Moshref-Javadi, Seokcheon Lee, Jose MA Tanchoco, Patrick A Brunese.* Multiple traveling salesman problem with drones: Mathematical model and heuristic approach. // *Computers & Industrial Engineering*. 2019. Vol. 129. Pp. 14–30. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.01.020>
21. *Dharm Raj Singh, Manoj Kumar Singh, Tarkeshwar Singh, Rajkishore Prasad.* Genetic Algorithm for Solving Multiple Traveling Salesmen Problem using a New Crossover and Population Generation. // *Computación y Sistemas*, Vol. 22, No. 2, 2018, Pp. 491–503 doi: 10.13053/CyS-22-2-2956
22. *Kayan Herdiana, Made Candiasa, Gede Indrawan.* Optimization of Adaptive Genetic Algorithm Parameters in Traveling Salesman Problem. // *Journal of Computer Networks, Architecture and High-Performance Computing*. 2022. Vol. 4. No. 2. Pp. 169–176. URL: <https://doi.org/10.47709/cnahpc.v4i2.1581>
23. *Хачумов М.В., Талалаев А.А., Хачумов В.М.* Об одном эвристическом критерии в задаче определения изоморфизма графов на основе инвариантов. // *Современные наукоемкие технологии*. 2022. №2. С.159-163. DOI: 10.17513/snt.39051
24. *Can Ke, Huifang Chenab.* Cooperative path planning for air–sea heterogeneous unmanned vehicles using search-and-tracking mission// *Ocean Engineering*. 2022. Vol. 262, 15 October 2022, Article 112020 URL: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.112020>
25. *Jihoon Park, Sukkeun Kim, Geemoon Noh, Hyeongmin Kim, Daewoo Lee, Inwon Lee.* Mission planning and performance verification of an unmanned surface vehicle using a genetic algorithm // *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*. 2021. Vol.13, Pp. 575-584. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijnaoe.2021.07.002>
26. *Wonhee Lee, Gwang-Hyeok Choi.* Visibility graph-based path-planning algorithm with quadtree representation // *Applied Ocean Research* Vol. 117, December 2021, Article102887. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2021.102887>

DETERMINING THE ROUTE OF MAXIMUM MONITORING ON THE GRAPH OF BENCHMARKS ON THE GROUND

EDUARD M. RUDENKO

PhD., associate professor at the Department of Mathematics of the Military Academy of Strategic Rocket Troops after Peter the Great (Serpukhov Branch), Russia, eduard5529@yandex.ru

ELENA V. SEMIKINA

lecturer at the Military Academy of Strategic Rocket Troops after Peter the Great (Serpukhov Branch), Russia, labinfo_serp@inbox.ru

ABSTRACT

Introduction: the paper considers a mathematical approach to determining the routes of maximum monitoring on the Euler graph, on which the largest number of UAVs can fly with an interval of one edge of the graph in such a way that a safe flight is carried out: not to be at the same vertices and edges at the same time for two or more devices. The determination of such routes is of great practical importance for the implementation of a group flight by the maximum number of vehicles. This provides the most dense and continuous monitoring in the area where the benchmarks are located. **Problem statement:** the problem from the set of Euler routes on the Euler graph to find routes of maximum monitoring. The problem of finding maximum monitoring routes is that the exact set of all Euler routes can be calculated only by enumeration, which cannot be calculated in a reasonable time for graphs with a large number of edges and vertices. Therefore, one has to choose from not a complete set of closed routes, but from a set calculated using a genetic algorithm, as a solution to an optimization problem for the objective function. **Methods:** determining the route of maximum monitoring from a set of Eulerian routes is carried out using a program for checking each of them to determine the number of UAVs making a formation flight along this route one after another with an interval of one edge in compliance with safety conditions. Thus, the maximum monitoring routes found depend on the initial set of optimal closed routes and may not coincide with the routes selected from the full set of all Euler routes, which can be called the maximum monitoring routes. **Results:** the resulting limited number of Euler routes, routes of maximum monitoring and routes of maximum monitoring can be increased by several times using the operators of inversion (inversion), cutting at intermediate vertices and automorphisms, if the graph has horizontal, vertical, diagonal symmetry, and so thereby get the opportunity to operate with a large variety of group flight options on the graph of benchmarks. At the same time, the number of the UAV group on the routes of maximum monitoring and the routes of the greatest monitoring does not change and is an invariant. **Practical significance:** a set of routes of maximum monitoring and routes of the greatest monitoring can be used in the flight algorithms of a UAV group to organize dense and continuous monitoring by benchmarks on the ground in compliance with the conditions of safe flight with an interval of one edge after each other.

Keywords: euler graphs of fixed points; optimal closed routes; maximum and maximum monitoring route; UAV; objective function; genetic algorithm.

REFERENCES

1. Rudenko E.M., Allilueva N.V., Semikina E.V. Routing on a graph of number-theoretic objective function and genetic algorithm. *Naukoemkie tehnologii v kosmicheskikh issledovanijah Zemli* [High tech in earth space research]. 2019. Vol. 11. No. 6. Pp. 4–14 (In Rus)
2. Bing Han, Tengpeng Qu, Xiaochong Tong, Jie Jiang, Sisi Zlatanova, Haipeng Wang, Chengqi Cheng. Grid-optimized UAV indoor path planning algorithms in a complex environment. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation* Vol. 111, July 2022, Article 102857. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jag.2022.102857>
3. Daragan A.D. Rudenko E.M., Zalogin V.S., Efremov A.A., Finogenov M.A. *Sistemy iskusstvennogo intellekta*. Monografija. Vol. 2. [Artificial intelligence systems. Monograph. Vol. 2.]. Serpukhov: FVA RVSN (filial v g. Serpuhov), 2021. 228 p. (In Rus)
4. Allilueva N.V., Rudenko E.M. Matematicheskij metod rascheta celevoj funkcii na grafah i reshenie zadachi marshrutizacii [Mathematical method of calculation of objective function on graphs and solution of routing task]. *Trudy MAI* [Proceedings Moscow Aviation Institute]. 2017. No. 96. <http://trudymai.ru/published.php?ID=85773> (date of access 30.06.2020). (In Russian)
5. Rudenko E.M., Semikina E.V. Unmanned aircraft routing, graph transcendent target functions and genetic algorithm. *Naukoemkie tehnologii v kosmicheskikh issledovanijah Zemli* [High tech in earth space research]. 2021. Vol. 13. No. 1. Pp. 6–16 (In Rus)
6. Lebedev G.N., Malygin V.B. Assessment of the application feasibility of the genetic algorithm for airports operations optimization based on the collaborative decision-making principles. *Nauchnyj vestnik MGTU GA* [Civil Aviation High TECHNOLOGIES]. 2019. Vol. 22. No. 5. Pp. 85–93.
7. Rudenko E.M., Semikina E.V. Intelligent monitoring of UAV group on eyler-hamilton reference graphs on the local. *Institut inzhenernoj fiziki* [Institute of Engineering Physics]. 2021. Vol. 62. No. 4. Pp. 75–80.
8. Rudenko E.M., Semikina E.V. Unmanned aircraft routing, graph transcendent target functions and genetic algorithm. *Institut inzhenernoj fiziki* [Institute of Engineering Physics]. 2022. Vol. 63. No. 1. Pp. 93–97
9. Goncharenko V.I., Lebedev G.N., Mikhailin D.A. Online two-dimensional route planning for a group of unmanned aerial vehicles. *Izvestija RAN. Teorija i sistemy upravlenija* [Journal of Computer and Systems Sciences International]. Luxembourg: Pleiades Link. 2019. Vol. 58. No. 1. Pp. 153-165
10. Sabino S., Horta N., Grilo A. Centralized unmanned aerial vehicle mesh network placement scheme: A multi-objective evolutionary algorithm approach. *Sensors*. 2018. Vol. 18. No. 12. <https://doi.org/10.3390/s18124387>
11. Agatz N., Bouman P., Schmidt M. Optimization approaches for the traveling salesman problem with drone. *Transp. Sci.* 2018. Vol. 52. No. 4. Pp. 965–981. <https://doi.org/10.1287/trsc.2017.0791>
12. Shuai Zhang, Siliang Liu, Weibo Xu, Wanru Wang. A novel multi-objective optimization model for the vehicle routing problem with drone delivery and dynamic flight endurance. *Computers & Industrial Engineering*. 2022. Vol. 173. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108679>
13. Adam J. Sobey, Przemyslaw Grudniewski. Re-inspiring the genetic algorithm with multi-level selection theory: Multi-Level Selection Genetic Algorithm (MLSGA). *Bioinspiration & Biomimetics*. 2018. Vol. 13. No. 5. DOI:10.1088/1748-3190/aad2e8 (date of access 02.07.2022).
14. Harshavardhan P.K., Kousik Krishnan. Hierarchical Genetic Algorithms with evolving objective functions. arXiv.org. 05 Aug 2019. URL: <https://arxiv.org/pdf/1812.10308.pdf> (date of access: 09.07.2022).
15. Xin J., Zhong J., Yang F., Cu, Y., Sheng J. An Improved Genetic Algorithm for Path-Planning of Unmanned Surface Vehicle. *Sensors*. 2019. Vol. 19. No. 11. <https://doi.org/10.3390/s19112640>
16. Karpov V. E. Ot roevoy robototekhniki k sociumu robotov. [From swarm robotics to the society of robots]. *Materialy Vserossijskoj nauchno-tehnicheskoy konferencii «Iskusstvennyj intellekt: problemy i puti reshenija – 2018»* [Proceedings of the All-Russian Scientific and Technical Conference "Artificial Intelligence: Problems and Solutions - 2018" (Kubinka, March 14-15, 2018)]. Pp.122–130. URL: http://raai.org/library/books/Konf_II_problem-2018/book1_intellect.pdf

17. Lebedev G.N., Mikhailin D.A. Avtomatizirovannaja sistema planirovanija gruppovyh dejstvij bespilotnikov pri zadannom grafike obsluzhivaniya mobil'nyh nazemnyh ob#ektov v prognoziruemoj dinamicheskoj obstanovke [Automated system for planning group actions of drones with a given schedule for servicing mobile ground objects in a predictable dynamic environment]. *Sbornik nauchnyh statej po materialam VI Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii «AVIATOR»* [Collection of scientific articles based on the materials of the VI International Scientific and Practical Conference "AVIATOR" (Voronezh, February 14–15, 2019)]. 2019. Pp. 39–45. (In Rus).
18. Khanra A., Pal T., Maiti M.K., Maiti M. Multi-objective four-dimensional imprecise TSP solved with a hybrid multi-objective ant colony optimization-genetic algorithm with diversity. *J. Intell. Fuzzy Syst.* 2019. Vol. 36. No. 1. Pp. 47-65. DOI: 10.3233/JIFS-172127
19. Bence Keresztury. Genetic algorithms and the Traveling Salesman Problem. Budapest. ELTE, Department of Operations Research. 2017. p. 56. URL: https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_alkmat/2017/keresztury_bence.pdf
20. Patchara Kitjacharoenchai, Mario Ventresca, Mohammad Moshref-Javadi, Seokcheon Lee, Jose MA Tanchoco, Patrick A Brunese. Multiple traveling salesman problem with drones: Mathematical model and heuristic approach. *Computers & Industrial Engineering.* 2019. Vol. 129. Pp. 14–30. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.01.020>
21. Dharm Raj Singh, Manoj Kumar Singh, Tarkeshwar Singh, Rajkishore Prasad. Genetic Algorithm for Solving Multiple Traveling Salesmen Problem using a New Crossover and Population Generation. *Computación y Sistemas*, 2018. Vol. 22, No. 2. Pp. 491–503 doi: 10.13053/CyS-22-2-2956
22. Kayan Herdiana, Made Candiasa, Gede Indrawan. Optimization of Adaptive Genetic Algorithm Parameters in Traveling Salesman Problem. *Journal of Computer Networks, Architecture and High-Performance Computing.* 2022. Vol. 4. No. 2. Pp. 169–176. URL: <https://doi.org/10.47709/cnahpc.v4i2.1581>
23. Khachumov M.V., Talalaev A.A., Khachumov V.M. On a heuristic criterion in the problem of determining the isomorphism of graphs based on invariants. *Tekhnicheskie nauki [Technical sciences]*. 2022. No. 2. Pp.159-163. DOI: 10.17513/snt.39051
24. Can Ke, Huifang Chenab. Cooperative path planning for air–sea heterogeneous unmanned vehicles using search-and-tracking mission// *Ocean Engineering.* 2022. Vol. 262, 15 October 2022, Article 112020 URL: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.112020>
25. Jihoon Park, Sukkeun Kim, Geemoon Noh, Hyeongmin Kim, Daewoo Lee, Inwon Lee. Mission planning and performance verification of an unmanned surface vehicle using a genetic algorithm. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering.* 2021. Vol.13, Pp. 575-584. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijnaoe.2021.07.002>
26. Wonhee Lee, Gwang-Hyeok Choi. Visibility graph-based path-planning algorithm with quadtree representation. *Applied Ocean Research* Vol. 117, December 2021, Article102887. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2021.102887>